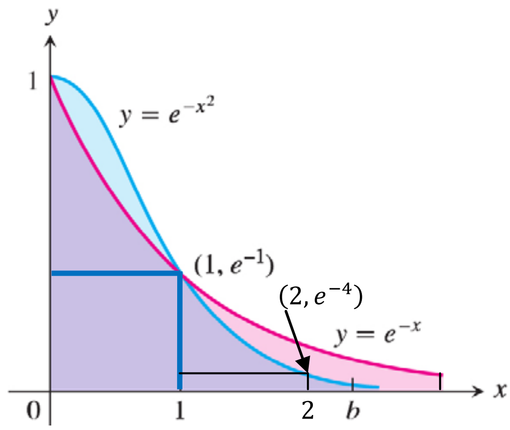
טור אינסופי ואינטגרל כפול (היה מועמד למבחן סוף סמסטר)

א. השתמש בהערכה ובמבחן האינטגרל, כדי להראות שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ מתכנס לערך קטן מ- $2/e$.

ב. השתמש ישירות במבחן האינטגרל כדי להראות שהטור מתכנס (קבע 0 כגבול תחתון).

פיתרון א':



האינטגרל $\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ מתכנס לערך קטן מ- $\frac{1}{e}$.

נראה זאת באמצעות השוואתו לאינטגרל ה"גג" $\int_1^{\infty} e^{-x}dx$ אשר מתכנס בדיוק ל- $\frac{1}{e}$:

$$\int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} e^{-x}dx = -\lim_{b\to\infty}\left[e^{-x}\right]_1^b = -\lim_{b\to\infty}\left[e^{-b}-e^{-1}\right] = \frac{1}{e}$$

ובכן, האינטגרל $\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ מתכנס לערך קטן מ- $\frac{1}{e}$, ואם כך הטור המתאים לו - $\sum_{n=2}^{\infty} e^{-n^2}$, מתכנס לערך קטן עוד יותר. נוסיף כעת e^{-1}, איברו הראשון של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$, ונקבל שטור זה מתכנס לערך קטן מ- $\frac{2}{e} \approx 0.736$

פיתרון ב':

כדי שיהא פתיר, נעלה את האינטגרל בריבוע לקבלת "נפח מעל רביע I" במקום "שטח ברביע I":

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{\infty} e^{-y^2}dy \quad => \quad \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2}dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

נעבור למשתנים פולאריים ונחשב :

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-r^2}rdrd\theta \rightarrow \begin{cases} u = -r^2 \\ du = -2rdr \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-r^2}-2rdrd\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{-\infty} e^{u}dud\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_{-\infty}^{0} e^{u}dud\theta = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_0^{\pi/2}\int_a^{0} e^{u}dud\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_0^{\pi/2} e^{u}\Big|_a^0 d\theta = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_0^{\pi/2}\left(e^0-e^a\right)d\theta = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{2}\,\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

נוציא כעת שורש כדי לבטל את ההעלאה בריבוע שעשינו קודם ונקבל: $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.886$

ובכן, האינטגרל $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ מתכנס (ל- $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$) ואם כך הטור $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ מתכנס (לפחות מ- $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$).