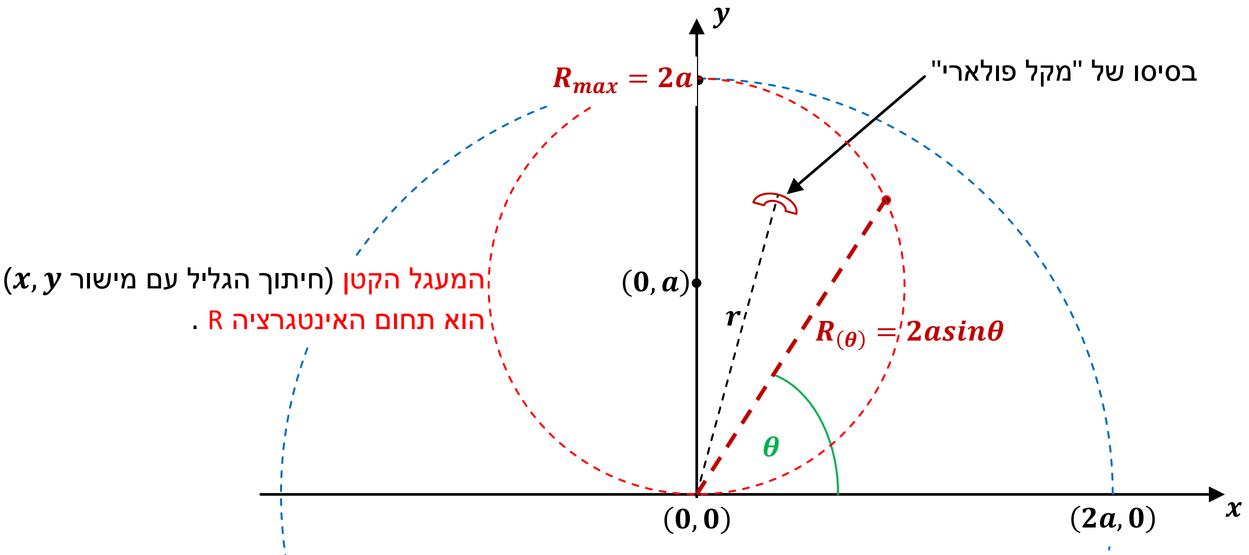
נתון הכדור $x^2+y^2+z^2=4a^2$. קודחים דרכו את הגליל $x^2+y^2=2ay$. בטא את נפח הקדח באמצעות a .

$$\textit{cylinder}:\quad x^2+y^2=2ay \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2+y^2-2ay=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+(y-a)^2=a^2 \\ R^2=2aR\sin\theta \quad \Rightarrow \quad R_{(\theta)}=2a\sin\theta \end{cases}$$



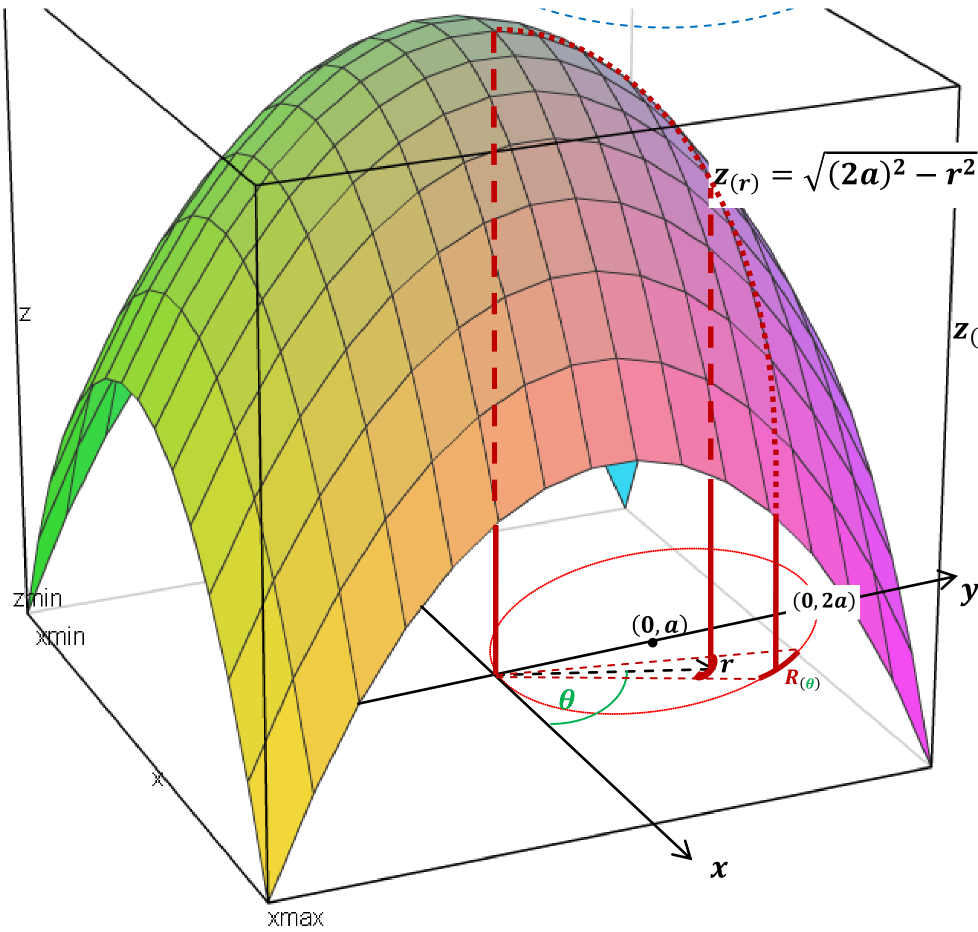
<u>למעלה</u>: חיתוך הגופים עם מישור x,y . מספיק לחשב את נפח הקדח

מעל הרביע הראשון. בסוף נכפול בארבע (אם נזכור).

<u>למטה</u>: מבט איזומטרי. מוצג חצי הכדור שמעל מישור x,y , וכן התחום בו חותך הגליל את המישור – תחום האינטגרציה.

מוצג גם "קיר פולארי" אשר נבנה באינטגרציה הראשונה לפי dr. בהיותו פולארי, <u>דפנותיו אינן מקבילות</u> - הזווית בניהן היא $d\theta$.

$$\textit{sphere}:\quad x^2+y^2+z^2=4a^2 \quad \Rightarrow \quad r^2+z^2=(2a)^2 \quad \Rightarrow \quad z_{(r)}=\sqrt{(2a)^2-r^2}$$

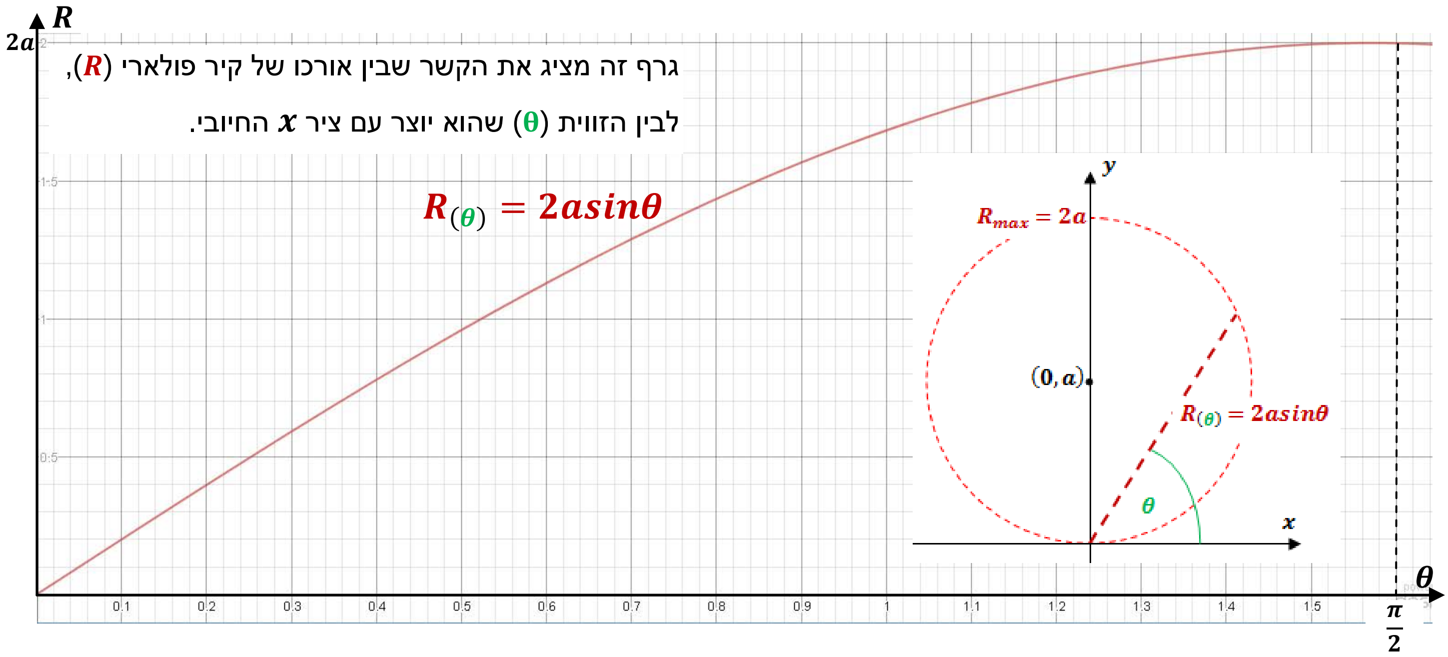


אורכו של קיר פולארי הוא $R_{(\theta)}$.
הקיר בנוי מ"מקלות פולאריים".
אורכו של מקל (z) תלוי במרחקו של
המקל מהראשית (r) באופן הבא :

$$z_{(r)}=\sqrt{(2a)^2-r^2}$$

כדי לבנות קיר פולארי, אנו מצמידים
מקלות פולאריים זה לזה החל במקל
אשר עומד ב- $r=0$ וכלה במקל אשר
עומד ב- $r=R_{(\theta)}$. זאת עושה
האינטגרציה הראשונה שלפי dr.

אח"כ אנו מצמידים קירות פולאריים זה
לזה, ככנפי מניפה. זאת עושה
האינטגרציה השנייה שלפי $d\theta$.



$$\iint\limits_R f_{(x,y)}\,dA \;=\; \int_0^{\pi/2}\int_0^{2asin\theta}\sqrt{(2a)^2-r^2}\cdot r\cdot dr\cdot d\theta \quad , \qquad \begin{cases} u=(2a)^2-r^2 \\ du=-2rdr \end{cases}$$

שימו לב כיצד היעקוביאן r של ההתמרה הפולארית "מקמבן" לנו את הנגזרת הפנימית של u !

$$\begin{cases} r=0 \quad \rightarrow \quad u=(2a)^2 \\ r=2asin\theta \quad \rightarrow \quad u=(2a)^2-(2asin\theta)^2 \;=\; (2a)^2(1-sin^2\theta) \;=\; (2a)^2cos^2\theta \;=\; (2acos\theta)^2 \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2asin\theta}\sqrt{(2a)^2-r^2}\cdot(-2)\cdot r\cdot dr\cdot d\theta \;=\; -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_{(2a)^2}^{(2acos\theta)^2}\sqrt{u}\cdot du\cdot d\theta \;=$$

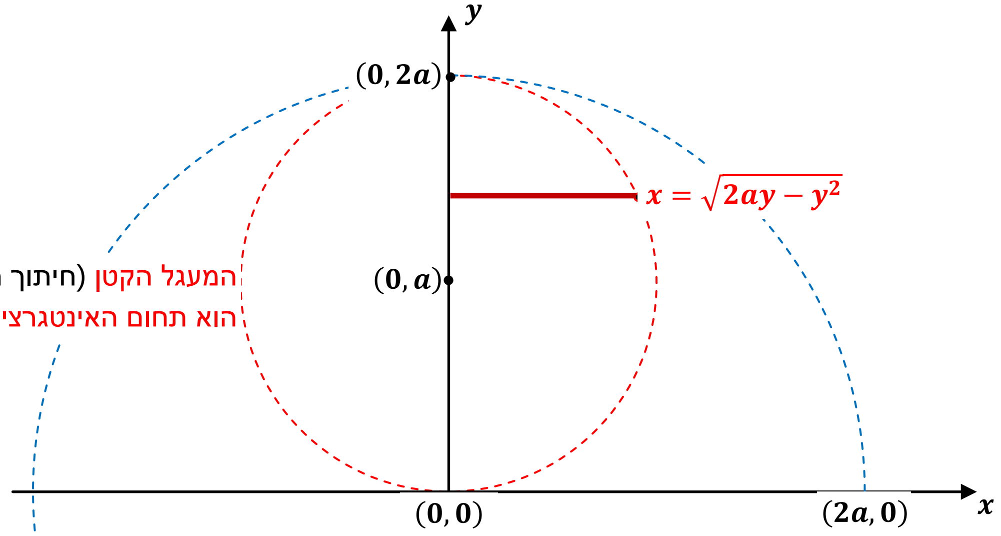
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_{(2acos\theta)^2}^{(2a)^2}\sqrt{u}\cdot du\cdot d\theta \;=\; \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} u^{3/2}\Big|_{(2acos\theta)^2}^{(2a)^2}\cdot d\theta \;=\; \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\left[(2a)^3-(2acos\theta)^3\right]\cdot d\theta \;=$$

$$= \frac{(2a)^3}{3}\int_0^{\pi/2}(1-cos^3\theta)d\theta \;=\; \frac{(2a)^3}{3}\int_0^{\pi/2}(1-cos\theta+sin^2\theta cos\theta)d\theta \;=\; \frac{(2a)^3}{3}\cdot\left(\theta-sin\theta+\frac{sin^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{(2a)^3}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-1+\frac{1}{3}\right) \;=\; \frac{8a^3}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right) \;=\; \frac{8a^3}{3}\cdot\frac{3\pi-4}{6} \;=\; \frac{4(3\pi-4)}{9}a^3 \;=>\; V_{\text{קדח}} = \frac{16(3\pi-4)}{9}a^3 \;\; Cubic\ Units$$

ננסה כעת לפתור את הבעיה במערכת הקרטזית x,y כדי להבין היכן צץ הקושי:

$$cylinder: \quad x^2+y^2=2ay \quad => \quad \begin{cases} x^2+y^2-2ay=0 \\ x=\sqrt{2ay-y^2} \end{cases} \quad => \quad x^2+(y-a)^2=a^2$$

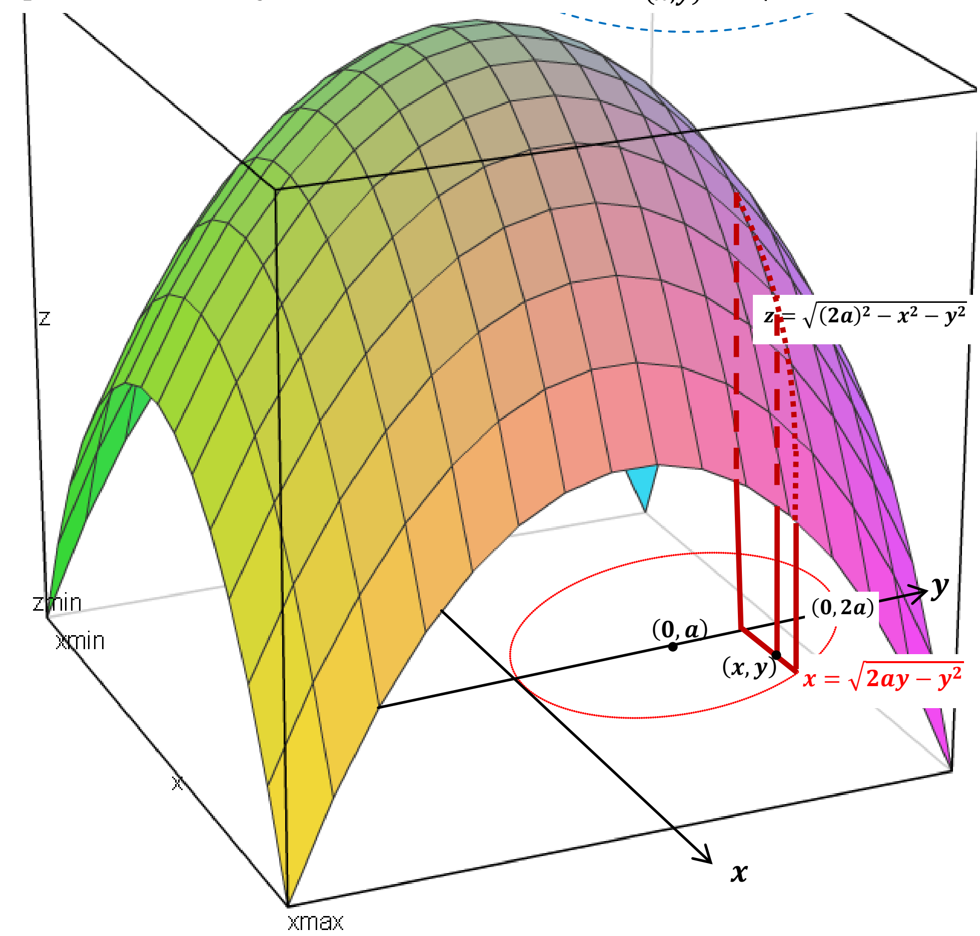


המעגל הקטן (חיתוך הגליל עם מישור x,y) הוא תחום האינטגרציה R .

<u>למעלה</u>: חיתוך הגופים עם מישור x,y . מספיק לחשב את נפח הקדח מעל הרביע הראשון. בסוף נכפול בארבע (אם נגיע לסוף...).

<u>למטה</u>: מבט איזומטרי. מוצג חצי הכדור שמעל מישור x,y , וכן התחום בו חותך הגליל את המישור – תחום האינטגרציה. מוצג גם "קיר קרטזי" אשר נבנה באינטגרציה הראשונה לפי dx. בהיותו קרטזי, דפנותיו מקבילות – המרחק בניהן הוא dy .

$$sphere: \quad x^2+y^2+z^2=4a^2 \quad => \quad z_{(x,y)}=\sqrt{(2a)^2-x^2-y^2}$$



$$\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} \sqrt{(2a)^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$\begin{cases} u=(2a)^2-x^2-y^2 \\ du=-2xdx \end{cases}$$

אופס! אין לנו x מחוץ לשורש לצורך du, לכן

נתקענו עם אינטגרל מסובך מאוד לחישוב.

כעת ברור לנו מדוע כדאי היה לעבור מהמערכת

הקרטזית x,y למערכת הפולארית r,θ .