1. ענה על ארבעה מתוך ששת הסעיפים הבאים (25 נקודות לכל סעיף).

א. האם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{1}{1+x^2}dx$ מתכנס או מתבדר. אם מתכנס, מה ערכו?

ב. האם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{k}+1}{k+1}$ מתכנס או מתבדר? אם מתכנס, האם בתנאי או מוחלט?

ג. עבור אילו ערכים של a הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a}{n+2}-\frac{1}{n+4})$ מתכנס? הסבר כל שלב.

ד. האם $\int_{0}^{2}\frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}dx$ מתכנס/מתבדר? הסבר כל שלב.

ה. הפיתוח לטור חזקות של f(x) הוא $\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n$. מי הפונקציה? עבור אילו ערכים של x הטור מתכנס? מהו ערכו של x עבורו הטור מתכנס ל-0.8?

ו. הראה כי לפונקציה $f(x,y)=\frac{x^4}{x^4+y^2}$ אין גבול כאשר $(x,y)\to(0,0)$ תוך שימוש במסלולים שונים. הסבר את שיקולך.

א. האם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{1}{1+x^2}dx$ מתכנס או מתבדר. אם מתכנס, מה ערכו?

<u>פיתרון:</u>

$$\int_{n}^{n+1}\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)\Big|_{n}^{n+1} = \arctan(n+1)-\arctan(n)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n}^{n+1}\frac{1}{1+x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}[\arctan(n+1)-\arctan(n)]$$

$$\sum_{n=0}^{k}[\arctan(n+1)-\arctan(n)] =$$

$$= \arctan(1)-\arctan(0)+\arctan(2)-\arctan(1)+\arctan(3)-\arctan(2)+$$

$$+\arctan(4)-\arctan(3)+\arctan(5)-\arctan(4)+\arctan(6)-\arctan(5)+$$

$$+\cdots+\arctan(k)-\arctan(k-1)+\arctan(k+1)-\arctan(k) =$$

$$= -\arctan(0)+\arctan(k+1) = \arctan(k+1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\arctan(n+1)-\arctan(n)] = \arctan(\infty+1) = \frac{\pi}{2}$$

ב. האם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{k}+1}{k+1}$ מתכנס או מתבדר? אם מתכנס, האם בתנאי או באופן מוחלט?

<u>פיתרון:</u>

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{k}+1}{k+1} \quad => \quad \lim_{k\to\infty}|\,a_k| \;=\; \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\sqrt{k}+1}{k+1}\right) \;=\; \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1+1/\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1/\sqrt{k}}\right) \;=\; 0$$

זהו טור <u>מתחלף</u> אשר איבריו שואפים לאפס כאשר $k\to\infty$, לכן הוא מתכנס לפי קריטריון לייבניץ.

הטור המוחלט $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}+1}{k+1}$ מהווה גג לטור ההרמוני $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ ואם כך מתבדר.

למעשה, כאשר $k\to\infty$ איבריו "מתלכדים" עם אברי הטור המתבדר $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$ $(p=0.5\le 1)$,

לסיכום: הטור הנתון מתכנס אך הטור המוחלט מתבדר. אם כך, הטור הנתון מתכנס בתנאי.

ג. עבור אילו ערכים של a הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a}{n+2}-\frac{1}{n+4})$ מתכנס? הסבר כל שלב.

<u>פיתרון:</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right) \;=\; a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2} \;-\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+4}$$

$$= \; a\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{n+2}+\cdots\right) - \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{n+4}+\cdots\right) \;=$$

$$= \; a\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + a\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{n+4}+\cdots\right) - \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{n+4}+\cdots\right) =$$

$$= \; a\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + (a-1)\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{n+4}+\cdots\right)$$

כאשר $a=1$ מתקבל $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$ וזהו הערך שאליו מתכנס הטור הנתון במקרה זה.

כאשר $a\neq 1$ מתווסף לאיבר $a\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$ הטור ההרמוני <u>המתבדר</u> (ללא ארבעת איבריו הראשונים

ומוכפל בקבוע $a-1$), ואם כך הטור הנתון מתבדר.

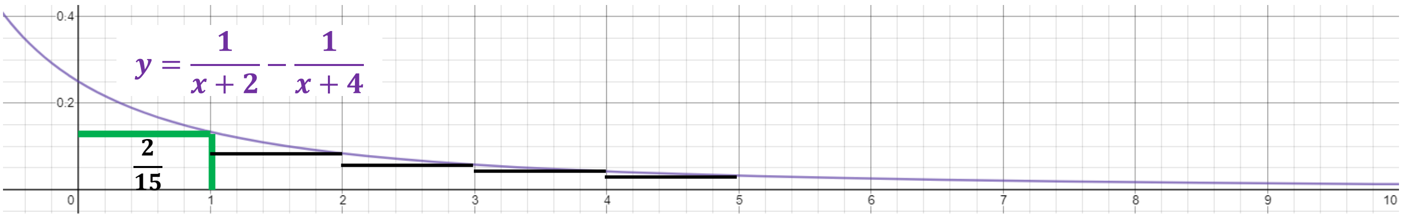
כעת, בשביל הספורט, במבחן האינטגרל:

$$\int_1^\infty \left(\frac{a}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)dx \;=\; \lim_{b\to\infty}\int_1^b \left(\frac{a}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)dx \;=\; \lim_{b\to\infty}\left[a\ln(x+2)-\ln(x+4)\right|_1^b \;=$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln\frac{(x+2)^a}{x+4}\Big|_1^b \;=\; \lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{(b+2)^a}{b+4}-\ln\frac{3^a}{5}\right] \;=\; \lim_{b\to\infty}\ln\frac{5}{3^a}\cdot\frac{(b+2)^a}{b+4} \;=$$

$$= \lim_{b\to\infty}\ln\frac{5}{3^a}\cdot b^{a-1}$$

עבור $a=1$ מתקבל $\int_1^\infty\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)dx \;=\; \lim_{b\to\infty}\ln\frac{5}{3}\cdot b^0 \;=\; \ln\frac{5}{3}$



הטור מתכנס אם כך לפחות מ- $\frac{2}{15}+\ln\frac{5}{3} \approx 0.644$

בדרך הראשונה בה הלכנו, קיבלנו שהטור מתכנס ל- $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}=0.58333\ldots$

עבור $1<a$ מתקבל $\frac{5}{3^a}\cdot\ln(\infty)=\infty$ ז"א האינטגרל מתבדר ואם כך גם הטור הנתון.

עבור $a<1$ מתקבל $\frac{5}{3^a}\cdot\ln(0^+)=-\infty$ ז"א האינטגרל מתבדר ואם כך גם הטור הנתון.

ד. האם $\int_0^2 \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}dx$ מתכנס/מתבדר? הסבר כל שלב.

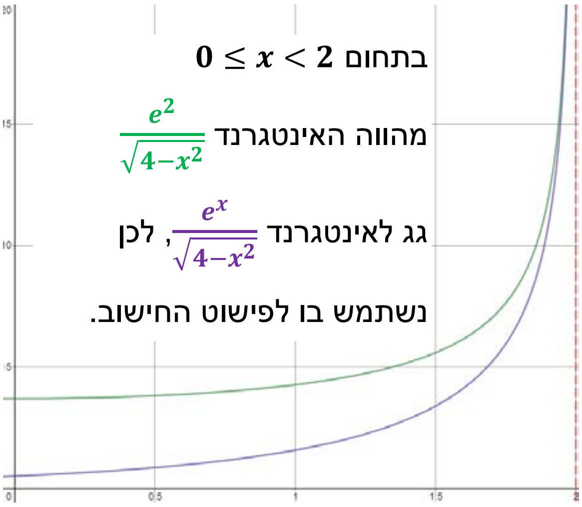
<u>פיתרון:</u>

זהו אינטגרל לא תקין מסוג II, קצהו הימני של תחום האינטגרציה מאפס את המכנה.

$$\int_0^2 \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}dx \;<\; \int_0^2 \frac{e^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$\int_0^2 \frac{e^2}{\sqrt{4-x^2}}dx \;=\; \lim_{b\to 2^-}\int_0^b \frac{e^2}{\sqrt{4-x^2}}dx \;=$$

$$= \; e^2\lim_{b\to 2^-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

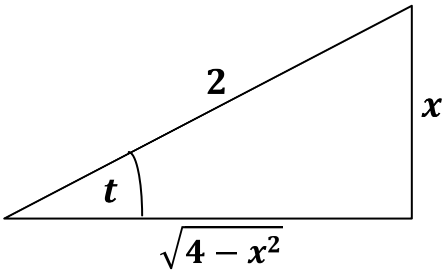


כעת אתנחתא לצורך פיתרון עקרוני של האינטגרל (באמצעות הצבה טריגונומטרית):

מטריגו בסיסי מבין ש- $\sqrt{4-x^2} = 2\cos t$ (קליל),

אבל מה להציב במקום dx ?

ובכן, מבין גם ש- $x = 2\sin t$, ואז



$$x = 2\sin t \quad => \quad \frac{dx}{dt} = 2\cos t \quad => \quad dx = 2\cos t\, dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx \;=\; \int \frac{1}{2\cos t}\cdot 2\cos t\, dt \;=\; \int dt \;=\; t \;=\; \arcsin\frac{x}{2}$$

ובחזרה לענייננו:

$$e^2\lim_{b\to 2^-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx \;=\; e^2\lim_{b\to 2^-}\left[\arcsin\frac{x}{2}\right|_0^b \;=\; e^2\lim_{b\to 2^-}\left(\arcsin\frac{b}{2}\right) \;=$$

$$= \; e^2(\arcsin 1) \;=\; e^2\frac{\pi}{2}$$

אינטגרל הגג מתכנס (ל- $e^2\frac{\pi}{2}$), אז האינטגרל הנתון לבטח מתכנס (לפחות מ- $e^2\frac{\pi}{2}$).

ה. הפיתוח לטור חזקות של f(x) הוא $\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n$. מהי הפונקציה?

עבור אילו ערכים של x מתכנס הטור? מהו ערכו של x עבורו הטור מתכנס ל- 0.8 ?

<u>פיתרון:</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n = 1+(x-2)+(x-2)^2+(x-2)^3+\cdots+(x-2)^n+\cdots$$

זהו טור הנדסי שבו $q = x-2$, $a_1 = 1$ ולכן $f_{(x)} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-(x-2)} = \frac{1}{3-x}$

טור הנדסי מתכנס עבור $-1 < q < 1$ ולפיכך:

$$-1 < q < 1 \quad => \quad -1 < x-2 < 1 \quad => \quad 1 < x < 3$$

ערכו של x עבורו הטור מתכנס ל- 0.8 הוא ערכו של x אשר עבורו הפונקציה השקולה שווה ל- 0.8 :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n = 0.8 \quad => \quad \frac{1}{3-x} = 0.8 \quad => \quad \frac{5}{3-x} = 4 \quad => \quad x = \frac{7}{4}$$

ו. הראה כי לפונקציה $f(x,y) = \frac{x^4}{x^4+y^2}$ אין גבול כאשר $(x,y) \to (0,0)$ תוך שימוש במסלולים שונים. לא ניתן לנוע על הצירים הראשיים! הסבר את שיקולך.

<u>פיתרון:</u>

יש לנוע במסלול אשר יעבור בראשית - היכן שהתבקשנו לחשב את הגבול.

נאסר עלינו לנוע על הצירים הראשיים, אשר מהווים את המסלולים הפשוטים ביותר שעוברים בראשית, אז נבחר את המסלול $y = x^2$ ואת המסלול $y = x$. שניהם עוברים בראשית.

$$f_{(x,y)} = \frac{x^4}{x^4+y^2} \quad => \quad f_{(x,x^2)} = \frac{x^4}{x^4+(x^2)^2} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \quad => \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{(x,x^2)} = \frac{1}{2}$$

$$f_{(x,y)} = \frac{x^4}{x^4+y^2} \quad => \quad f_{(x,x)} = \frac{x^4}{x^4+x^2} = \frac{x^4}{x^2(x^2+1)} = \frac{x^2}{x^2+1} \quad => \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{(x,x)} = 0$$

בהתקרבנו לראשית במסלול א' התקבל הגבול $\frac{1}{2}$ ובהתקרבנו לראשית במסלול ב' התקבל הגבול 0.

אם כך, לפונקציה $f(x,y) = \frac{x^4}{x^4+y^2}$ אין גבול כאשר $(x,y) \to (0,0)$.

2. א. גזור את הטור $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ כדי לקבל את הטור עבור $1/(1-x)^2$

ב. כאשר זורקים שתי קוביות מזל, ההסתברות לקבל סכום השווה ל-7 הוא p=1/6. אם תזרוק את הקוביות באופן עקבי, שוב ושוב, ההסתברות שהערך 7 יופיע לראשונה בזריקה ה- n ית הוא $q^{n-1}p$, כאשר $q = 1 - p = 5/6$. מספר הזריקות המצופה עד שהערך 7 יופיע לראשונה הוא $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}p$. מצא את הסכום של טור זה (30 נק').

ג. כמהנדס המיישם עקרונות סטטיסטים לשיטות תעשייתיות, אתה בוחן אקראית פריטים הנלקחים מקו הייצור. אתה מאבחן את הפריט שנלקח כ"תקין" או "פגום". אם ההסתברות לפריט תקין הוא p ולפריט פגום הוא $q = 1 - p$, אז ההסתברות לפריט פגום המתגלה לראשונה בדגימה ה-n ית הוא $p^{n-1}q$. פריט פגום יכול להתגלות לראשונה בדגימה הראשונה (בהסתברות q), השנייה (בהסתברות p^1q), השלישית (בהסתברות p^2q) וכן הלאה. מספר הדגימות הממוצע הדרוש למציאת הפריט הפגום הראשון נתון ע"י הביטוי: $\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1}q$. חשב סכום זה בהנחה ש $0<p<1$ (50 נקו').

פיתרון א':

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

פיתרון ב':

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}p = \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}(1-q) = \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n} =$$

$$= (1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \cdots + nq^{n-1} + \cdots) - (q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n + \cdots) =$$

$$= 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p} = 6$$

פיתרון ג':

על פי הסעיף הקודם, סכום הביטוי $\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1}q$ הינו $\frac{1}{q}$.