1. אינטגרל לא אמיתי:

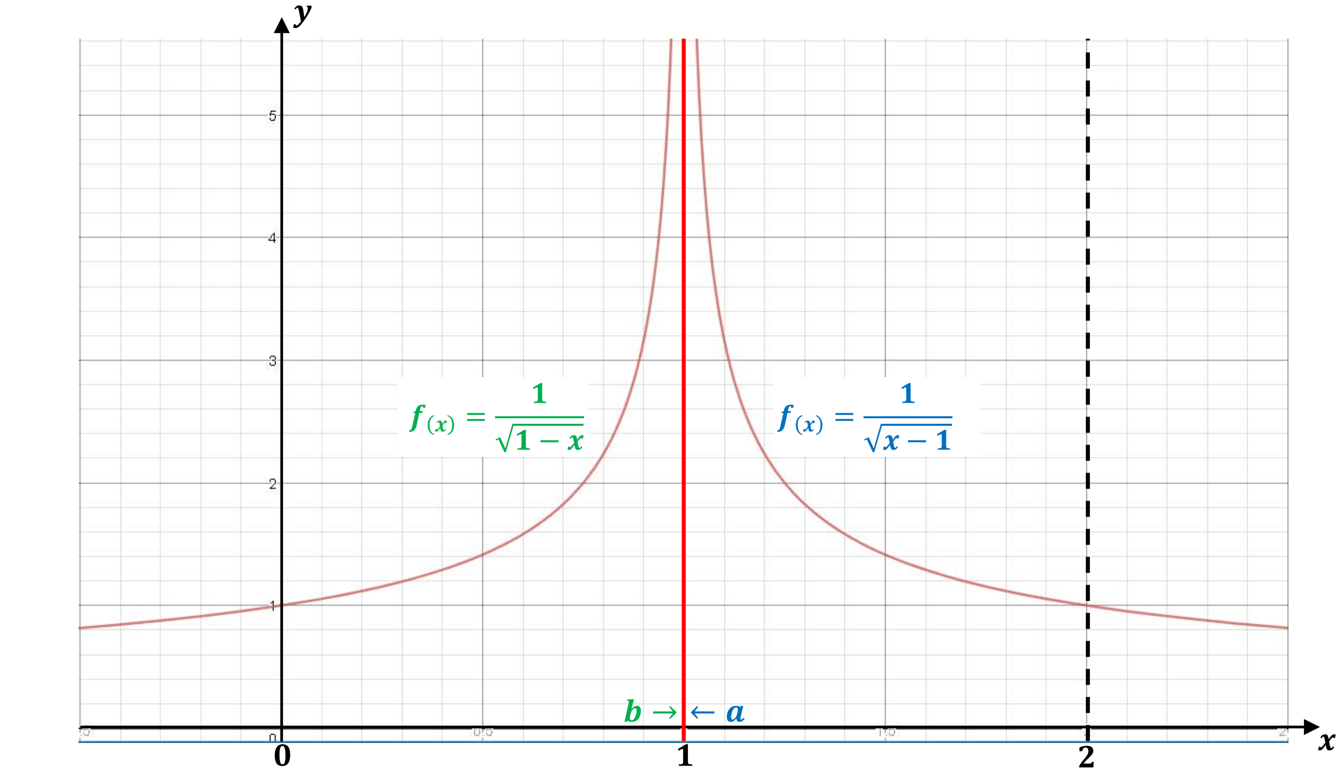
א. חשב את $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}dx$ (12 נק')

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}dx = \lim_{b\to1^-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx + \lim_{a\to1^+}\int_a^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$

$$\lim_{b\to1^-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = -2\lim_{b\to1^-}\sqrt{1-x}\,\Big|_0^b = -2\lim_{b\to1^-}\left(\sqrt{1-b}-1\right) = 2$$

$$\lim_{a\to1^+}\int_a^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = 2\lim_{a\to1^+}\sqrt{x-1}\,\Big|_a^2 = 2\lim_{a\to1^+}\left(1-\sqrt{a-1}\right) = 2$$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}dx = 2+2 = 4$$



ב. האם הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\sqrt{k^6+2k}}$ מתכנס? הסבר כל שלב.

דרך א' – מבחן השוואה

נבדוק ראשית אם $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, ז"א אם איברי הטור "מתכווצים" ל- 0 כאשר מיקומם בטור "גדול מאוד".

אם לא כך הוא , הטור לבטח מתבדר. אם כך הוא , **ייתכן** שהטור מתכנס ואז נתקדם הלאה.

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{\sqrt{k^6+2k}} = \lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{k^2}{k^6+2k}} = \lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{k}{k^5+2}} = \lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{1}{k^4+\frac{2}{k}}} = \sqrt{\frac{1}{\infty+0}} = 0$$

קיבלנו $lim_{k\to\infty} a_k = 0$, שהינו כאמור תנאי הכרחי **אך לא מספיק** לקביעת התכנסותו של טור.

נתקדם הלאה.

דרך א' - מבחן השוואה:

עבור $1 \le k$ מתקיים $\frac{k}{\sqrt{k^6+2k}} < \frac{k}{\sqrt{k^6}} = \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$, ולכן הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ מהווה "גג" לטור הנדון.

כמו כן, הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ הינו טור **p** מתכנס, כי מתקיים בו התנאי **1< p** .

מצאנו טור מתכנס אשר מהווה גג לטור הנדון, ואם כך הטור הנדון לבטח מתכנס - $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\sqrt{k^6+2k}}$ מתכנס.

דרך ב' – מבחן האינטגרל

אנו רוצים לבדוק אם $\int_1^{\infty}\frac{x}{\sqrt{x^6+2x}}dx$ מתכנס. אם הוא מתכנס אז גם $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\sqrt{k^6+2k}}$ מתכנס ע"פ מבחן האינטגרל.

מאחר שהאינטגרל הנ"ל קשה לפיתרון, נחפש אינטגרנד פשוט יותר אשר יהווה "גג" ל- $\frac{x}{\sqrt{x^6+2x}}$.

עבור $1 \le x$ מתקיים $\frac{x}{\sqrt{x^6+2x}} < \frac{x}{\sqrt{x^6}} = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$, ומכך נובע שהפונקציה $f_{(x)} = \frac{1}{x^2}$ משמשת "גג"

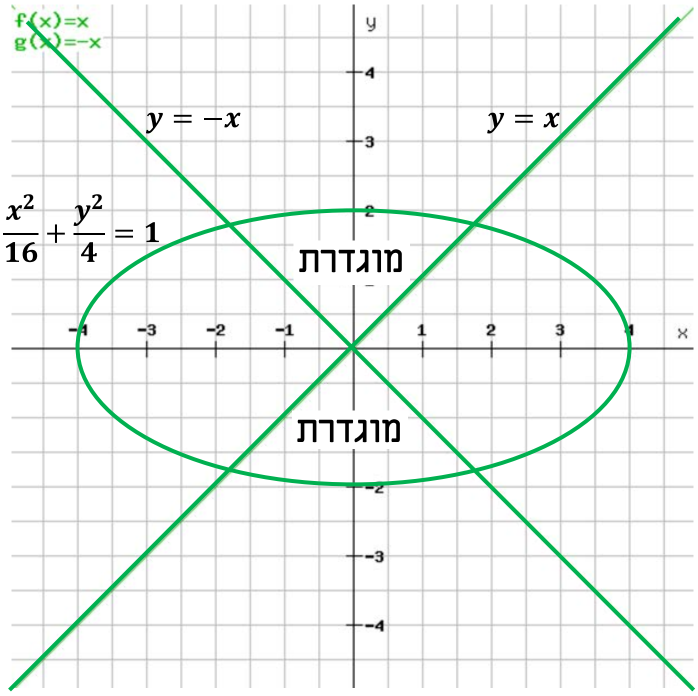
לפונקציה $g_{(x)} = \frac{x}{\sqrt{x^6+2x}}$. נבדוק כעת אם $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{dx}$ מתכנס. אם כן, אז $\int_1^{\infty}\frac{x}{\sqrt{x^6+2x}}\mathrm{dx}$ מתכנס לבטח.

ובכן, ברור ש- $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{dx}$ מתכנס כי זהו אינטגרל **p** שבו $1 < p$. בכל זאת נחשבו:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathbf{dx} = -\frac{1}{x}\bigg|_1^{\infty} = -\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{1}\right) = -(0-1) = 1$$

$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ מתכנס (ל- 1) <= $\int_1^{\infty}\frac{x}{\sqrt{x^6+2x}}dx$ מתכנס (לפחות מ- 1) <= $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\sqrt{k^6+2k}}$ מתכנס.

ג. שרטט את תחום ההגדרה של $f(x,y)=\sqrt{y^2-x^2}-\sqrt{16-x^2-4y^2}$ (13 נק')



$y^2-x^2\geq 0 \quad => \quad (y+x)(y-x)\geq 0$

$a)\quad (y+x)\geq 0 \quad \cap \quad (y-x)\geq 0$

$y\geq -x \quad \cap \quad y\geq x$

OR

$b)\quad (y+x)\leq 0 \quad \cap \quad (y-x)\leq 0$

$y\leq -x \quad \cap \quad y\leq x$

<u>AND</u>

$$c)\quad 16-x^2-4y^2\geq 0 \quad => \quad x^2+4y^2\leq 16 \quad => \quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}\leq 1$$

<u>לסיכום</u>: התחום שמעל **<u>או</u>** התחום שמתחת לשני הישרים, **<u>וגם</u>** בתוך האליפסה.

ד. רשום את טור מקלורן של $f(x)=sin^2x$ (13 נק').

$$f(x)=sin^2x=\frac{1}{2}(1-cos2x)$$

טור מקלורן של $f_{(x)}=cos\,x$ הוא :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot x^{2k}=1-\frac{1}{2!}\cdot x^2+\frac{1}{4!}\cdot x^4-\frac{1}{6!}\cdot x^6+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}+\cdots$$

ולפיכך, באמצעות הצבה, טור מקלורן של $f_{(x)}=cos\,2x$ הוא :

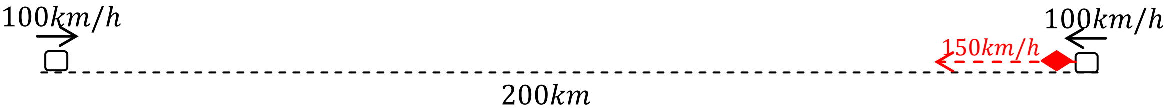
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot(2x)^{2k}=1-\frac{1}{2!}\cdot 4x^2+\frac{1}{4!}\cdot 16x^4-\frac{1}{6!}\cdot 64x^6+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot(2x)^{2n}+\cdots$$

כעת נותר רק להפחית את הטור שקיבלנו מ- 1 (ולהזיז אינדקס כך שיתחיל באחד במקום באפס), ואז לכפול בחצי :

$$f(x)=sin^2x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2!}\cdot 4x^2-\frac{1}{4!}\cdot 16x^4+\frac{1}{6!}\cdot 64x^6-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\cdot(2x)^{2n}+\cdots\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\cdot(2x)^{2k}$$

2. שתי רכבות המרוחקות 200 ק"מ זו מזו יוצאות בו זמנית האחת לקראת השנייה במהירות של 100 קמ"ש.
רחפן שמהירותו 150 קמ"ש עף ביניהן הלוך ושוב עד שהן נפגשות.
בעזרת פיתוח לטור אינסופי, חשב את סך הדרך שעובר הרחפן.

מהלך ראשון:



מרחק בין רכבות (גדול מהמרחק שיעבור הרחפן): $\boldsymbol{D_0 = 200\ km}$

מהירות יחסית בין רחפן לרכבת שלקראתו: $\boldsymbol{v_{rel} = 250\ km/h}$

משך מעוף: $\boldsymbol{t = \frac{D_0}{v_{rel}} = \frac{200}{250} = \frac{4}{5}\ h}$

מהירות הרחפן: $\boldsymbol{v = 150\ km/h}$

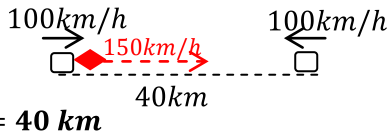
מרחק שעובר הרחפן: $\boldsymbol{S = t \cdot v = 120\ km}$

המהירות היחסית בין שתי הרכבות היא $\boldsymbol{V = 200\ km/h}$

המרחק ביניהן מתקצר על פי הנוסחה: $\boldsymbol{d_{(t)} = D_0 - V \cdot t = 200(1-t)\ km}$

התהליך כולו אורך אם כך **שעה אחת**, וכבר ברור שהרחפן יעבור מרחק כולל של $\boldsymbol{S_{total} = T \cdot v = 150\ km}$.

מהלך שני:



מרחק בין רכבות (גדול מהמרחק שיעבור הרחפן): $\boldsymbol{d_{\left(\frac{4}{5}\right)} = 200\left(1-\frac{4}{5}\right) = 200 \cdot \frac{1}{5} = 40\ km}$

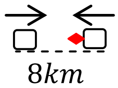
מהירות יחסית בין רחפן לרכבת שלקראתו: $\boldsymbol{v_{rel} = 250\ km/h}$

משך מעוף: $\boldsymbol{t = \frac{d}{v_{rel}} = \frac{4}{25}\ h}$

מהירות הרחפן: $\boldsymbol{v = 150\ km/h}$

מרחק שעובר הרחפן: $\boldsymbol{S = t \cdot v = 24\ km}$

מהלך שלישי:



מרחק בין רכבות (גדול מהמרחק שיעבור הרחפן): $\boldsymbol{d_{\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{25}\right)} = 200\left(1-\frac{24}{25}\right) = 200 \cdot \frac{1}{25} = 8\ km}$

מהירות יחסית בין רחפן לרכבת שלקראתו: $\boldsymbol{v_{rel} = 250\ km/h}$

משך מעוף: $\boldsymbol{t = \frac{d}{v_{rel}} = \frac{4}{125}\ h}$

מהירות הרחפן: $\boldsymbol{v = 150\ km/h}$

מרחק שעובר הרחפן: $\boldsymbol{S = t \cdot v = \frac{24}{5}\ km}$

בכל מהלך עובר הרחפן חמישית מהמרחק שעבר במהלך הקודם. במהלך הראשון עבר 120 ק"מ.

$$\boldsymbol{\sum S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{120}{1-\frac{1}{5}} = 150\ km}$$

3. הנפח V, ביחידות של סמ"ק, של 1 מול של גז אידאלי, נתון ע"י הביטוי **PV=82.06T**, כאשר P הוא הלחץ באטמוספרות (מסומן *at*) ו-T היא הטמפרטורה במעלות קלווין (מסומנת ^{O}k).
נתון כי הגז נמצא בטמפרטורה של $300^{O}k$ ובלחץ של $5at$.

א. בתנאים הנתונים, מהו קצב שינוי נפחו של הגז כתלות בלחץ בלבד? (5 נק').
ב. שרטט גרף המתאר את נפח הגז כתלות בלחץ הגז, כאשר $T = 300°k$ (5 נק').
ג. סמן ב-A את הנקודה על הגרף, אשר מתאימה לתנאים הנתונים, וצייר משיק לגרף בנקודה זו. מהי משוואתו? (10 נק').
ד. תוך שימוש בתוצאה של סעיף א', חשב את השינוי המשוער בנפח הגז אם נגדיל את הלחץ שלו באטמוספרה אחת? סמן ע"י האות B את הנקודה המתאימה ללחץ החדש (10 נק').
ה. מהו השינוי האמיתי בנפח הגז? סמן ע"י האות C את הנקודה המתאימה (10 נק').
ממה נובע הפער שבין תוצאות הסעיפים ד' ו-ה'? הסבר רק בעזרת הנקודות שסומנו (10 נק').

פיתרון:

ראשית נבודד בביטוי הנתון את הנפח V : $V_{(P,T)} = 82.06 \cdot \frac{T}{P}$

א) קצב השינוי של נפח הגז כתלות בלחץ בלבד. נגזור לפי הלחץ **P** תוך שהטמפרטורה **T** מוחזקת קבועה:

$$V_{(P,T)} = 82.06T \cdot \frac{1}{P} \;=>\; \frac{d}{dP}V_{(P,T)} = 82.06T \cdot \frac{-1}{P^2} \;=>\; \frac{d}{dP}V_{(5,\ 300)} = 82.06 \cdot 300 \cdot \frac{-1}{5^2} = -984.7\ cm^3/at$$

ב) גרף - ראה שרטוט בדף הבא.

ג) משוואת המשיק :

$$V_{(5,300)} = \frac{82.06 \cdot 300}{5} = 4923.6\ cm^3 \;=>\; (5\ , 4923.6)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \;=>\; V - 4923.6 = -984.7(P - 5) \;=>\; V_{(P)} = -984.7P + 9847.1$$

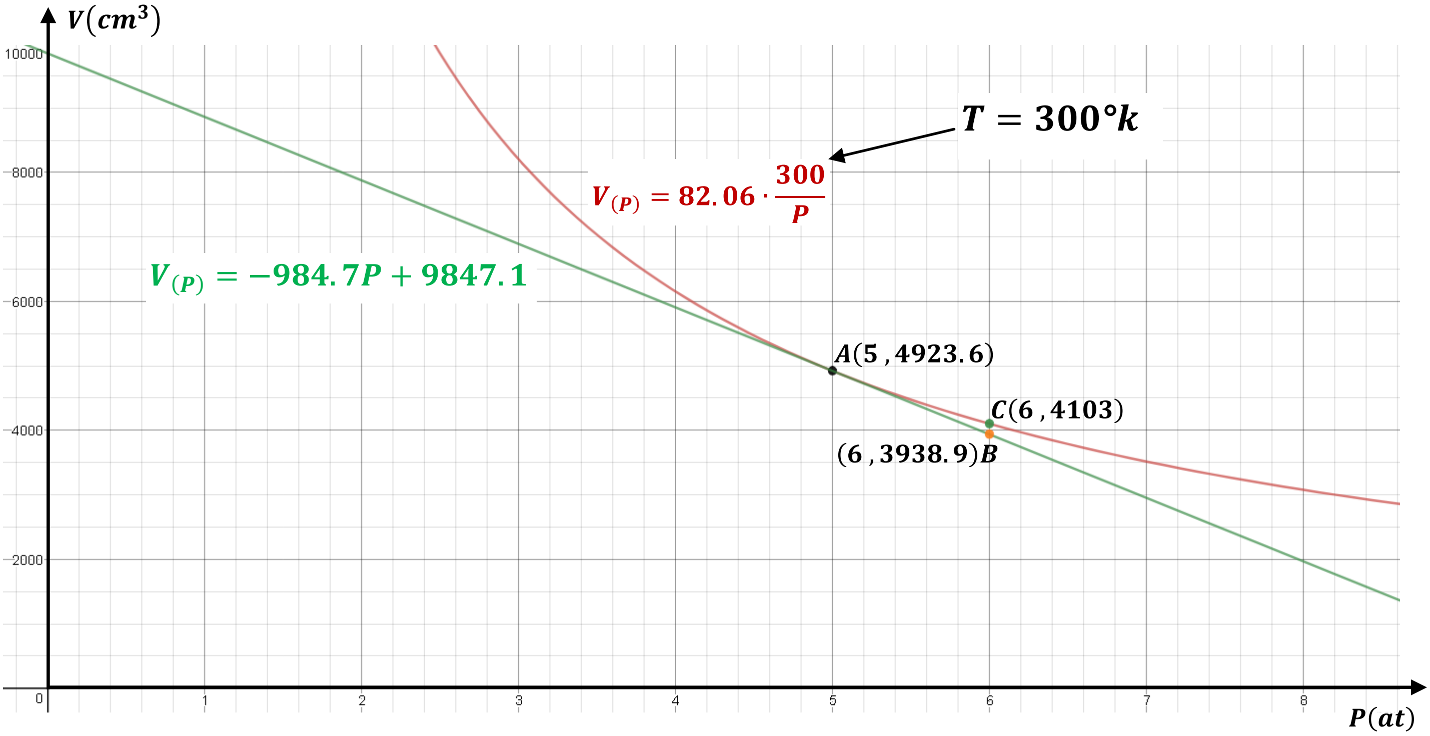
ד) השינוי המשוער בנפח הגז :

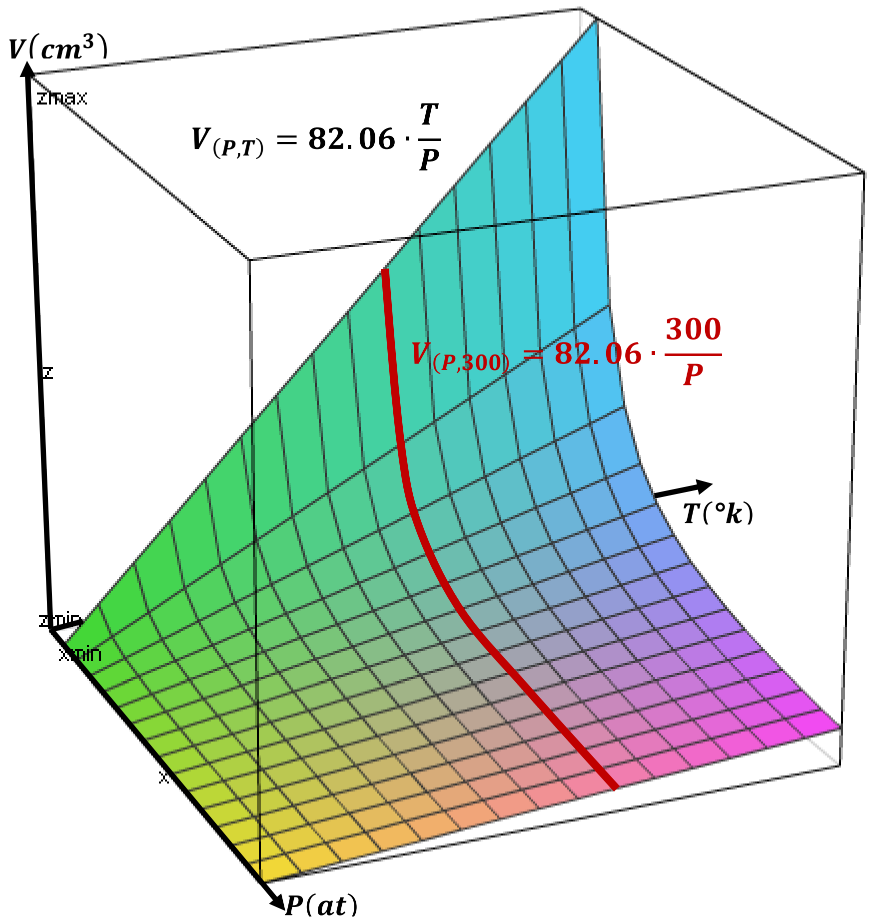
$$\Delta V = \frac{dV_{(5,\ 300)}}{dP} \cdot \Delta P = -984.72 \cdot 1 = -984.72\ cm^3 \approx -985\ cm^3$$

ה) השינוי האמיתי בנפח הגז :

$$\Delta V = V_f - V_i = V_{(6,\ 300)} - V_{(5,\ 300)} = 82.06 \cdot 300\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right) = -820.6\ cm^3$$

השינוי המשוער בנפח הגז הוא המרחק האנכי שבין הנקודות ***A*** ו- ***B***.
השינוי האמיתי בנפח הגז הוא המרחק האנכי שבין הנקודות ***A*** ו- ***C***.
הפער שבין המרחקים הנ"ל נובע מהצעד הגדול שעשינו במקביל לציר ***P*** באזור שבו עקמומיות הגרף גבוהה.





באיור משמאל - מבט תלת-ממדי.
ככל שגדל הלחץ, קטן הנפח, וככל
שגובהת הטמפרטורה, גדל הנפח.
התוואי החום הוא למעשה הגרף
החום שצויר לעיל. הטמפרטורה
לאורכו היא $\mathbf{300°k}$.

בשאלה זו דנו בדיפרנציאל החלקי
של הנפח (V) לפי לחץ (P), ולכן
הייתה זו בעיה דו ממדית.
יכולנו גם לדון בדיפרנציאל החלקי
של הנפח (V) לפי טמפרטורה (T),
וגם אז הייתה זו בעיה דו ממדית.

שילובם של שני הדיפרנציאלים
החלקיים הוא הדיפרנציאל השלם,
אשר הופך את הבעיה לתלת-ממדית.