1. חשב את $\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \cdots$ (15 נקו')

פיתרון: נתבונן בטור מקלורן של $\sin x$ ונבחין כי זהו בעצם הטור הנתון כאשר $x = \pi$.

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \frac{1}{5!}\cdot x^5 - \frac{1}{7!}\cdot x^7 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1} + \ldots$$

$$\sin \pi = \pi - \frac{1}{3!}\cdot \pi^3 + \frac{1}{5!}\cdot \pi^5 - \frac{1}{7!}\cdot \pi^7 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot \pi^{2n+1} + \ldots$$

אנו יודעים שטור מקלורן של $\sin x$ מתכנס עבור כל ערך של x , ואם כך גם עבור $x = \pi$, מן הסתם :

$$\sin \pi = \pi - \frac{1}{3!}\cdot \pi^3 + \frac{1}{5!}\cdot \pi^5 - \frac{1}{7!}\cdot \pi^7 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot \pi^{2n+1} + \ldots = 0$$

2. חשב את $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ (15 נקו')

פיתרון: נתבונן שוב בטור מקלורן של $\sin x$ ונבחין כי זהו בעצם הטור הנתון כאשר $x = 1$.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} + \ldots = \sin 1 \approx 0.8415$$

3. חשב את הנגזרת העשירית של הפונקציה $f(x) = x^6 e^x$ בנקודה x=0 (20 נקו')

פיתרון: כדי לא לגזור עשר פעמים, נחליף את e^x בטור מקלורן שלו וננסה למצוא קיצור דרך.

$$f(x) = x^6 e^x = x^6 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+6}}{k!} = x^6 + x^7 + \frac{x^8}{2!} + \frac{x^9}{3!} + \frac{1}{4!}x^{10} + \frac{x^{11}}{5!} + \ldots + \frac{x^{n+6}}{n!} + \cdots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(10)}(0)}{10!}\cdot x^{10} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + \ldots$$

מהשוואת המקדם של x^{10} בטור מקלורן של $f(x)$ למקדם של x^{10} בנוסחת מקלורן, נקבל:

$$\frac{1}{4!} = \frac{f^{(10)}(0)}{10!} \quad => \quad f^{(10)}(0) = \frac{10!}{4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4!} = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 151{,}200$$

4. נתון $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n$. מצא את $f(x)$ (10 נקו').

לאילו ערכים של x תשובתך מתייחסת? (5 נקו')

מצא את x עבורו $\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n = 0.8$ (5 נקו')

פיתרון:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n = 1 + (x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + \cdots + (x-2)^n + \cdots$$

זהו טור הנדסי שבו $q = x-2$, $a_1 = 1$ ולכן $f(x) = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-(x-2)} = \frac{1}{3-x}$

התשובה מתייחסת לערכי x שעבורם הטור מתכנס: $-1 < q < 1 \quad => \quad -1 < x-2 < 1 \quad => \quad 1 < x < 3$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n = 0.8 \quad => \quad \frac{1}{3-x} = 0.8 \quad => \quad \frac{5}{3-x} = 4 \quad => \quad 5 = 12 - 4x \quad => \quad x = \frac{7}{4}$$

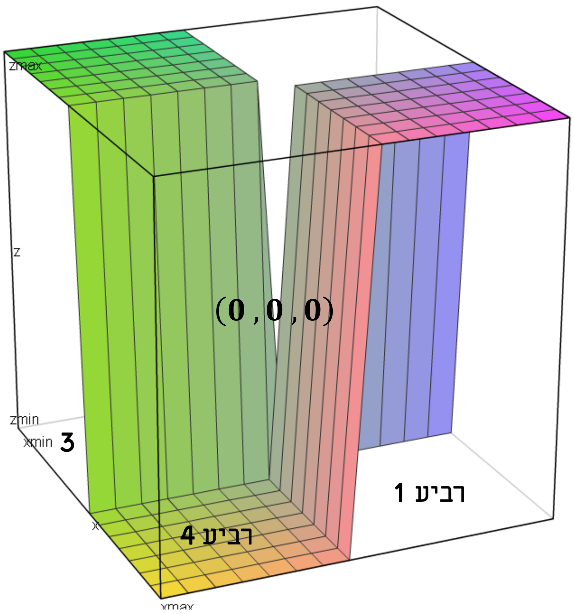
5. האם לפונקציה $f(x,y) = \frac{xy}{|xy|}$ יש גבול כאשר $(x,y) \leftarrow (0,0)$? (15 נקו')

פיתרון:

עבור $0 < xy$ (הרביעים הראשון או השלישי) אין משמעות לערך המוחלט והגבול הוא 1.

עבור $xy < 0$ (הרביעים השני או הרביעי) יש משמעות לערך המוחלט והגבול הוא 1- .

אם כך, לפונקציה הנתונה אין גבול כאשר $(x,y) \leftarrow (0,0)$.



6. אם $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ האם זה אומר שהפונקציה מוגדרת בנקודה (x_0,y_0) ? הסבר.

פיתרון: לא. למוגדרות של פונקציה בנקודה אין כל קשר למושג הגבול.

לראיה, אם במשטח הפונקציה $f(x,y)$ ישנו "חור" בנקודה (x_0,y_0,z_0), אז הגבול הנ"ל קיים וערכו $L = z_0$.

יחד עם זאת, יתכן שלא קיים z_1 המתאים ל- (x_0,y_0), ואז הפונקציה אינה מוגדרת בנקודה.

אגב, אם קיים z_1 המתאים ל- (x_0,y_0), ומתקיים $z_1 = z_0$, אז הפונקציה רציפה בנקודה.