1. התבונן באיורים שמתחת.

א. באיור השמאלי מתואר משולש שווה צלעות שאורך צלעו $2b$. מהו שטחו ? (5 נקודות).

ב. באיור האמצעי צויר משולש פנימי הפוך, אף הוא שווה צלעות. מה שטחו ? (10 נקודות).

ג. באיור הימני צוירו עוד שלושה משולשים הפוכים מסביב למשולש הפנימי, זהים זה לזה ושווי צלעות.
מהו **סכום** שטחיהם ? (10 נקודות).

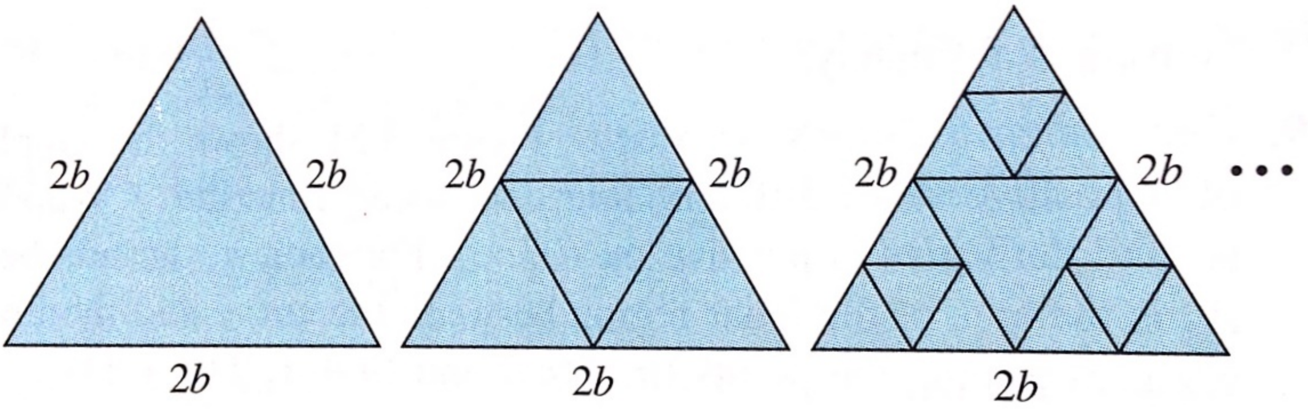
ד. באופן זה נמשיך לצייר מחזורים של משולשים **הפוכים** שווי צלעות.
המשולשים בכל מחזור קטנים ורבים מאלה שבמחזור הקודם.
נבנה סדרה אינסופית, אשר כל איבר בה שווה לסכום שטחי המשולשים שבמחזור המתאים.
במחזור הראשון ישנו משולש יחיד – המשולש ההפוך שבאיור האמצעי.

i. רשום את שלושת האיברים הראשונים בסדרה. (5 נקודות)

ii. רשום ביטוי לאיבר הכללי של הסדרה. (5 נקודות)

iii. רשום ביטוי לסכום אינסוף איבריה של הסדרה, באופן המקובל (עם סיגמא). (5 נקודות)
מהי משמעותו של ביטוי זה מבחינה גיאומטרית ? הסבר במשפט אחד. (5 נקודות).

iv. כעת חשב את ערכו של הביטוי מסעיף iii (הראה את אופן החישוב). (15 נקודות)
האם הערך שקיבלת מאשש את ההסבר שנתת בסעיף iii ?



פיתרון :

א. $A=\frac{2b\cdot 2b\cdot sin60^\circ}{2}=\sqrt{3}b^2$

ב. $A=\frac{b\cdot b\cdot sin60^\circ}{2}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}b^2$

ג. $3A=3\frac{\frac{1}{2}b\cdot\frac{1}{2}b\cdot sin60^\circ}{2}=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}b^2$

ד. i. $\left\{\frac{\sqrt{3}b^2}{4},\ \frac{3\sqrt{3}b^2}{16},\ \frac{9\sqrt{3}b^2}{64},\ \dots,\ \frac{3^{n-1}\sqrt{3}b^2}{4^n},\ \dots\right\}$

ii. $a_n=\frac{3^{n-1}\sqrt{3}b^2}{4^n}$

---

iii. $\sum\frac{3^{n-1}\sqrt{3}b^2}{4^n}=\sum_0^\infty\frac{3^n\sqrt{3}b^2}{4^{n+1}}=\sum_0^\infty\frac{3^n\sqrt{3}b^2}{4\cdot 4^n}=\frac{\sqrt{3}b^2}{4}\sum_0^\infty\frac{3^n}{4^n}=\frac{\sqrt{3}b^2}{4}\sum_0^\infty\left(\frac{3}{4}\right)^n$

הביטוי מייצג את שטח המשולש הגדול שבאיור השמאלי – סכום שטחיהם של אינסוף משולשים פנימיים.

iv. $\frac{\sqrt{3}b^2}{4}\sum_0^\infty\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{\sqrt{3}b^2}{4}\cdot\frac{1}{1-0.75}=\frac{\sqrt{3}b^2}{4}\cdot 4=\sqrt{3}b^2$

כן, התקבלה תוצאה השווה לשטחו של המשולש הגדול מסעיף א'.

.2

א. תוך שימוש בפונקצית גאמה, הגיע המתמטיקאי James Stirling לקירוב: $lim_{n\to\infty} n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$.

i. הראה כי $lim_{n\to\infty}(2n\pi)^{1/(2n)} = 1$ (10 נקו') .

ii. תוך שימוש בקירוב של סטרלינג ובתוצאה של סעיף i, הראה כי $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \frac{n}{e}$ (10 נקו').

ב. מצא את הערכים של a ו- b כך ש: $lim_{x\to 0}\frac{cos(ax)-b}{2x^2} = -1$ (20 נקו').

פיתרון א' :

i. יש להראות כי $y = \lim_{n\to\infty}(2n\pi)^{1/2n} = 1$

$$y = \lim_{n\to\infty}(2n\pi)^{1/2n} \qquad => \qquad ln\, y = \lim_{n\to\infty} ln(2n\pi)^{1/2n} = \lim_{n\to\infty}(1/2n)\, ln(2n\pi) = [0\cdot\infty]$$

$$ln\, y = \lim_{n\to\infty}(1/2n)\, ln(2n\pi) = \lim_{n\to\infty}\frac{ln(2n\pi)}{2n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \to Lopital = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\pi}{2n\pi}}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0$$

$$ln\, y = 0 \qquad => \qquad y = \lim_{n\to\infty}(2n\pi)^{1/2n} = 1$$

גזרנו לפי n. הדבר מותר כי כאשר $n\to\infty$ מתקיים $\frac{\Delta n}{n}\to 0$. לולא כן, היינו חייבים לעבור למשתנה רציף.

ii. יש להראות כי $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \frac{n}{e}$ תוך שימוש בנוסחת הקירוב $lim_{n\to\infty} n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$

נוציא שורש "n" משני האגפים של נוסחת הקירוב:

$$\lim_{n\to\infty} n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \qquad \backslash \sqrt[n]{(\ \ )}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \left(\frac{n}{e}\right)\cdot(2n\pi)^{1/2n}$$

נותר רק להראות ש- $\lim_{n\to\infty}(2n\pi)^{1/2n} = 1$, ועשינו זאת בסעיף הקודם.

פיתרון ב' :

כדי שיתקיים $lim_{x\to 0}\frac{cos(ax)-b}{2x^2} = -1$ חייב להתקיים $b = 1$, אחרת לא נקבל $\left[\frac{0}{0}\right]$ ולא תהיה אופציה

לתוצאה סופית. אם כך, $lim_{x\to 0}\frac{cos(ax)-1}{2x^2} = -1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos(ax)-1}{2x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \to Lopital = \lim_{x\to 0}\frac{-asin(ax)}{4x} = \left[\frac{0}{0}\right] \to Lopital =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-a^2cos(ax)}{4} = \frac{-a^2}{4} = -1 \qquad => \qquad a^2 = 4 \qquad => \qquad a = \pm 2$$

3. א. מהו טור מקלורן של $f(x)=\frac{1}{1-x}$? (10 נקו'). מהו תחום ההתכנסות של הטור? (10 נקו').

ב. רשום את טור טיילור סביב 1 של $g(x)=\ln x$. (5 נקו').

העזר בטור שרשמת כדי לחשב את הערך שאליו מתכנס הטור ההרמוני המתחלף. (5 נקו').

ג. עשה הצבה מתאימה בטור מסעיף ב' , כך שלאחר גזירה של שני האגפים תקבל את טור מקלורן של סעיף א'. (10 נקו').

פיתרון א': $\frac{1}{1-x}$ היא תבנית מוכרת של טור הנדסי : $\frac{a_1}{1-q}$, לכן הטור מתקבל מיידית:

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}=\sum x^{n-1}=\sum_{0}^{\infty} x^n$$

תחום ההתכנסות של הטור מתקבל אף הוא מיידית על פי התנאי הידוע להתכנסותו של טור הנדסי: $-1<q<1$.
במקרה דנן $q=x$ כך שתחום ההתכנסות של הטור הינו $-1<x<1$.

פיתרון ב': טור טיילור סביב 1 של $\ln x$ רשום בדף הנוסחאות:

$$\ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

אם מציבים בו $x=2$ מתקבל הטור ההרמוני המתחלף, לכן הערך שאליו מתכנס הטור ההרמוני המתחלף הינו $\ln 2$

פיתרון ג':

אנו יודעים ש- $\frac{1}{1-x}$ היא הנגזרת של $-\ln(1-x)$, לכן :

נכפול את שני האגפים של הטור מסעיף ב' ב- (-1) :

$$-\ln x=-(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{3}(x-1)^3+\cdots=\sum(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n}$$

ונציב $(1-x)$ במקום x :

$$-\ln(1-x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots=\sum\frac{x^n}{n}$$

נגזור כעת את שני האגפים, ונקבל את טור מקלורן של סעיף א':

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}=\sum x^{n-1}=\sum_{0}^{\infty} x^n$$