1. <u>אינטגרל לא אמיתי</u>

עבור אילו ערכים של a האינטגרל $\int_1^\infty (\frac{ax}{1+x^2} - \frac{1}{2x})dx$ מתכנס? מה ערכו של האינטגרל?

$$\frac{ax}{1+x^2} - \frac{1}{2x} = \frac{2ax^2 - 1 - x^2}{1+x^2} = \frac{(2a-1)x^2 - 1}{1+x^2}$$

עבור $a = \frac{1}{2}$ מתקבל (בערך מוחלט) $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$ אשר $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ המתכנס ($p = 2$) מהווה לו גג.

עבור $a \neq \frac{1}{2}$ מתקבל אינטגרנד אשר כלל אינו שואף לאפס (אלא שואף ל- $2a - 1$) כאשר $x \to \infty$.

אם כך, האינטגרל הנתון מתכנס רק עבור $a = \frac{1}{2}$.

חישוב ערכו של האינטגרל:

$$-\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = -\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{1+x^2}dx = -\lim_{b\to\infty} arctan(x)\Big|_1^b =$$

$$= -\lim_{b\to\infty}[arctan(b) - arctan(1)] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

2. גרדיאנט ונגזרת כיוונית

לפונקציה $f(x,y)$, בנקודה P(1,2), יש נגזרת שערכה 2 בכיוון הנקודה A(2,2) ונגזרת שערכה ‎-2 בכיוון הנקודה B(1,1).

א. מצא את $f_x(1,2)$, $f_y(1,2)$ (12 נק').

ב. מצא את הנגזרת של f בנקודה P(1,2) בכיוון אל הנקודה C(4,6) (13 נק').

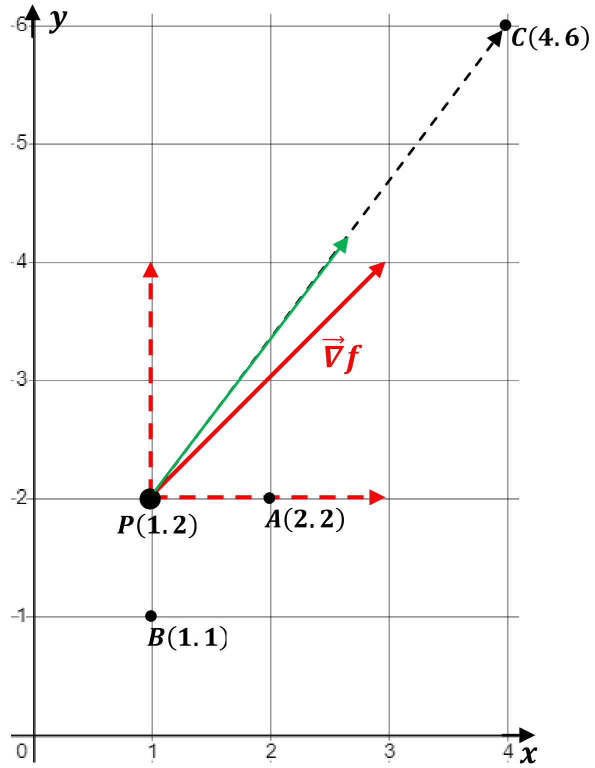
<u>פיתרון א':</u>

$\overrightarrow{PA} = \hat{x}$ (מתקבל מחיסור שיעורי נקודה P מאלה של נקודה A). גודלו ממילא אחד כך ש- $\hat{u}_{\mathrm{PA}} = \hat{x}$.

$\overrightarrow{PB} = -\hat{y}$ (מתקבל מחיסור שיעורי נקודה P מאלה של נקודה B). גודלו ממילא אחד כך ש- $\hat{u}_{\mathrm{PB}} = -\hat{y}$.

אנו יודעים שמכפלת ווקטור הגרדיאנט $\vec{\nabla} f$ בווקטור הכיוון $\hat{u}$ מניבה את הנגזרת הכיוונית (אשר נתונה לנו כאן):

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f \cdot \hat{u}_{PA} = \left(\frac{df}{ds}\right)_{\hat{u}_{PA},P_0} \quad => \quad \left(f_{x(1.2)}\hat{x} + f_{y(1.2)}\hat{y}\right)\cdot(\hat{x}) = 2\,(given) = f_{x(1.2)} \quad => \quad f_{x(1.2)} = 2 \\ \vec{\nabla} f \cdot \hat{u}_{PB} = \left(\frac{df}{ds}\right)_{\hat{u}_{PB},P_0} \quad => \quad \left(f_{x(1.2)}\hat{x} + f_{y(1.2)}\hat{y}\right)\cdot(-\hat{y}) = -2\,(given) = -f_{y(1.2)} \quad => \quad f_{y(1.2)} = 2 \end{cases}$$



מהציור קל להבין את משמעות הנתונים:

"ל- $f_{(x,y)}$ בנקודה P(1,2) יש נגזרת שערכה 2 בכיוון הנקודה A(2,2)" משמעו "היטל הגרדיאנט ימינה הוא 2".

"ונגזרת שערכה ‎-2 בכיוון הנקודה B(1,1)" משמעו "היטל הגרדיאנט מטה הוא ‎-2, ז"א 2 מעלה".

משתמע מכך שגודל הגרדיאנט הוא $\sqrt{8}$ וכיוונו $45°$.

לסעיף ב':

היטל הגרדיאנט בכיוון הנקודה $C(4.6)$ (חץ ירוק) קטן אך במעט מהגרדיאנט, בשל הזווית הקטנה שביניהם ($8.13°$).

הכפלת גודל הגרדיאנט בקוסינוס הזווית הזו, תניב את התשובה לסעיף ב':

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\hat{u}_{PC},P_0} = \sqrt{8}\cos 8.13° = 2.8$$

<u>פיתרון ב'</u> (בדרך הפורמאלית):

$\overrightarrow{PC} = 3\hat{x} + 4\hat{y}$ (מתקבל מחיסור שיעורי נקודה P מאלה של נקודה C). גודלו 5 כך ש- $\hat{u}_{PC} = \frac{3}{5}\hat{x} + \frac{4}{5}\hat{y}$.

מכפלת ווקטור הגרדיאנט $\vec{\nabla} f$ בווקטור הכיוון $\hat{u}$ מניבה את הנגזרת הכיוונית (שעלינו לחשבן כאן):

$$\vec{\nabla} f \cdot \hat{u}_{\mathrm{PC}} = \left(\frac{df}{ds}\right)_{\hat{u}_{\mathrm{PC}},P_0} \quad => \quad (2\hat{x} + 2\hat{y})\cdot\left(\tfrac{3}{5}\hat{x} + \tfrac{4}{5}\hat{y}\right) = \frac{6}{5} + \frac{8}{5} = \frac{14}{5} = 2.8$$

3. <u>נקודות קיצון</u>

הטמפרטורה (במעלות צלזיוס) של משטח מעגלי אשר מרכזו בראשית ורדיוסו $\sqrt{8}$, ניתנת לחישוב על ידי הביטוי $T(x,y) = 60xy + 10$. מהן הנקודות החמות ביותר והקרות ביותר על פני המשטח?

<u>פיתרון:</u>

נקודות קיצון פנימיות:

$$\begin{cases} f_x = 60y = 0 \quad => \quad x = 0 \\ f_y = 60x = 0 \quad => \quad x = 0 \end{cases} \quad => \quad (0,0,10)suspected$$

תנועה על משטח הפונקציה דרך הנקודה הנ"ל במקביל לציר X מניבה פיתול (וגם במקביל לציר Y).

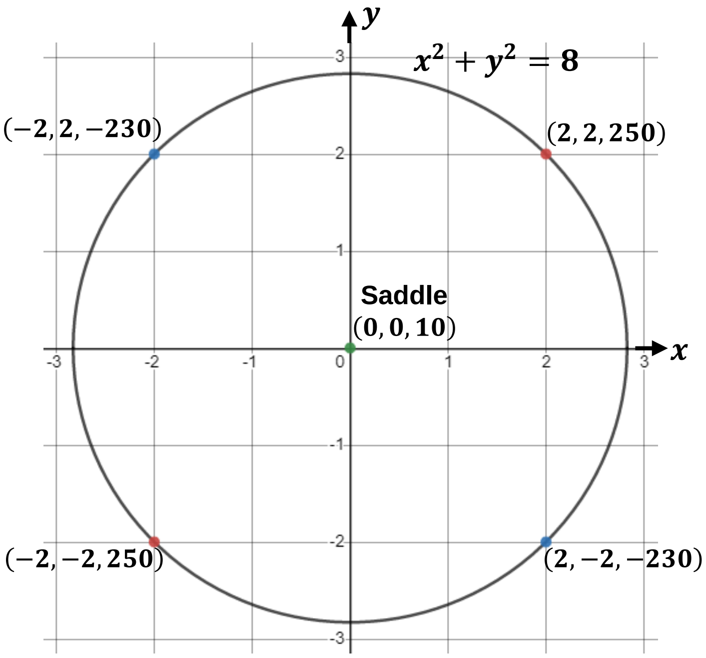
אם כך זוהי נקודת אוכף.

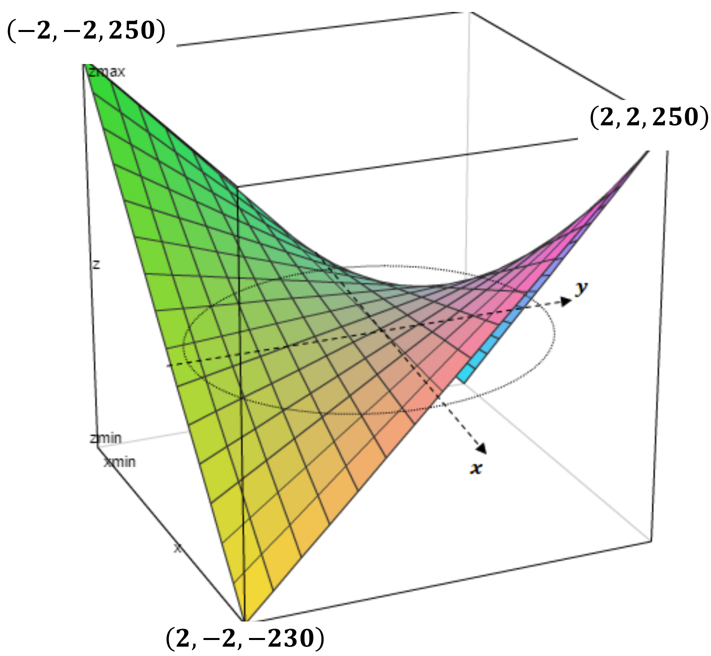
כעת לנקודות קיצון על היקף המשטח, ז"א על האילוץ $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 8}$:

$$T_{\left(x,\sqrt{8-x^2}\right)} = 60x\sqrt{8-x^2} + 10 \quad => \quad T'_{(x)} = 60\left(\sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{8-x^2}}\right) = 0 \quad =>$$

$$=> \quad 8 - x^2 - x^2 = 0 \quad => \quad x = \pm 2 \quad , \quad y = \sqrt{8-x^2} = \pm 2$$

$$T_{(2,2)} = 250°C \quad , \quad T_{(-2,2)} = -230°C \quad , \quad T_{(-2,-2)} = 250°C \quad , \quad T_{(2,-2)} = -230°C$$





4. לגרנז'

הנח כי $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ הם n מספרים חיוביים.

מצא את הערך המקסימאלי של $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ הכפוף לאילוץ $\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 1$.

פיתרון:

$$f_{(x_i)} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_i x_i + \cdots + a_n x_n \rightarrow \quad max$$

$$g_{(x_i)} = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 1 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \cdots + {x_i}^2 + \cdots + {x_n}^2 - 1$$

פתרון משוואת הגרדיינט:

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \quad => \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{x} = \lambda \cdot 2 \sum_{i=1}^{n} x_i \hat{x} \quad => \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \quad =>$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_i + \cdots + a_n = 2\lambda(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_i + \cdots + x_n) \quad =>$$

$$\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \frac{a_3}{x_3} = \cdots = \frac{a_i}{x_i} = \cdots = \frac{a_n}{x_n} = 2\lambda \quad => \quad x_i = \frac{x_1}{a_1} a_i \quad => \quad {x_i}^2 = \frac{{x_1}^2}{{a_1}^2} {a_i}^2$$

הצבה במשוואת האילוץ:

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 1 \quad => \quad \frac{{x_1}^2}{{a_1}^2} \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 = 1 \quad => \quad \frac{{x_1}^2}{{a_1}^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2} \quad => \quad \frac{x_1}{a_1} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2}}$$

הצבה בפונקצית המטרה:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \frac{x_1}{a_1} \sum_{i=1}^{n} a_i a_i = \frac{x_1}{a_1} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2}} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2}$$

הערך המרבי שיכולה לקבל הפונקציה $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ תחת התנאי ש- $\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 1$ הוא $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2}$.

לדוגמה ניקח חמישה מקדמים חיוביים:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 3 \quad a_4 = 4 \quad a_5 = 5 \quad => \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{5} {a_i}^2} = \sqrt{1 + 4 + 9 + 16 + 25} = \sqrt{55}$$

כל חמישה "Xים" שסכום ריבועיהם 1 אשר נציב בפונקציה $\sum_{i=1}^{5} a_i x_i$ עם המקדמים הנ"ל, ייגרמו לה לקבל ערך קטן מ- $\sqrt{55}$, למעט חמישיית "Xים" אחת שתביאה לקבל את הערך המרבי $\sqrt{55}$. מיהי אותה חמישייה? אין לי מושג.

5. <u>אינטגרל כפול:</u>

חשב את הנפח הכלוא בין הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - 2y^2$ ומישור xy בהתאם לסעיפים הבאים:

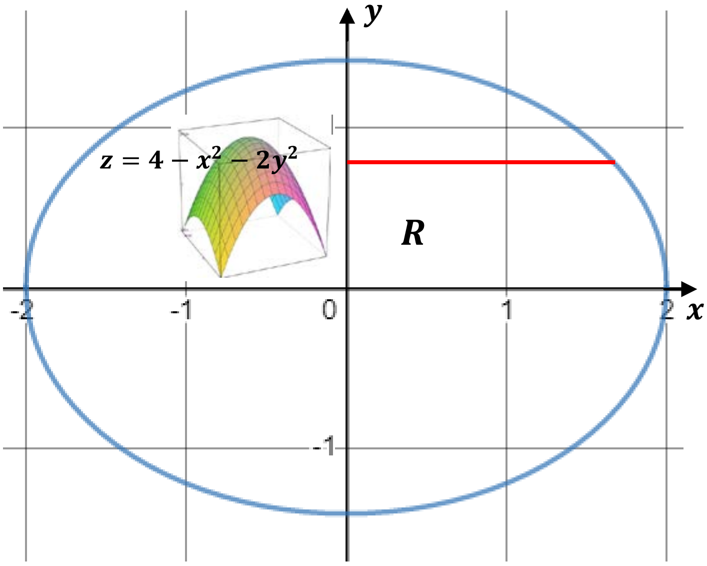
א. צייר את האליפסה במישור xy וסמן אותה על ידי האות R. רשום, בלי לפתור, את הנפח בעזרת אינטגרל כפול על המשתנים x ו-y (5 נק').

ב. עבור למשתנים חדשים u ו-v כך שהאליפסה במישור xy תהפוך למעגל במישור uv. צייר את המעגל ורשום את הנפח, בלי לפתור, בעזרת אינטגרל כפול על המשתנים u ו-v (5 נק').

ג. עבור להצגה פולארית, כך שהמעגל יהפוך למלבן במישור α ו- r. צייר את המלבן וחשב את הנפח הכלוא (10)

ד. כיצד נראה הגוף מסעיף ג' בתלת מימד. צייר איכותית בלבד (5 נק').

<u>פיתרון א':</u> נציב $z = 0$ כדי לקבל את איזור האינטגרציה שחותך הפרבולואיד הנתון ממישור xy



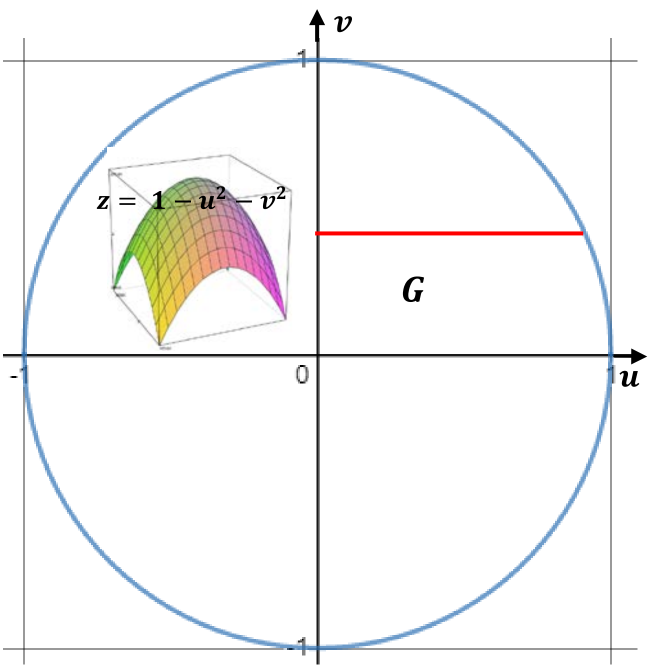
$$0 = 4 - x^2 - 2y^2 \quad => \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

$$V = \iint_R f_{(x,y)}\, dxdy$$

$$V = 4\int_{y=0}^{y=\sqrt{2}} \int_{x=0}^{x=\sqrt{4-2y^2}} (4 - x^2 - 2y^2)dxdy$$

4 פעמים הנפח שמעל רביע I הודות לסימטריה.

<u>פיתרון ב':</u>



$$u = \frac{x}{2} \quad , \quad v = \frac{y}{\sqrt{2}} \quad => \quad u^2 + v^2 = 1$$

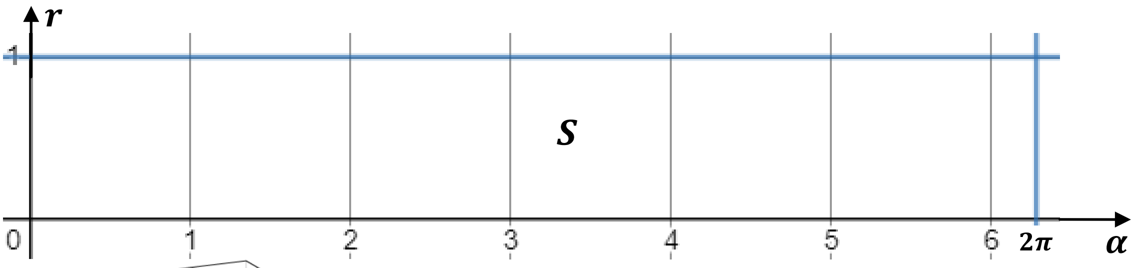
$$V = \iint_G f_{(2u,\sqrt{2}v)} \left|J_{(u,v)}\right| dudv$$

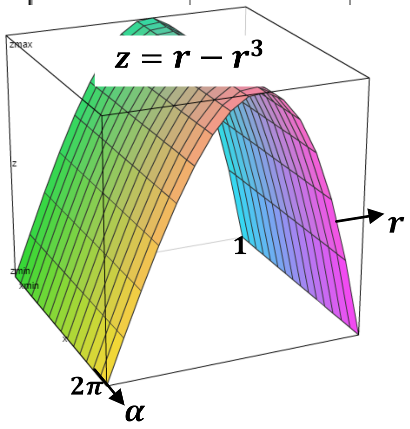
$$J_{(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = 2 \cdot \sqrt{2} - 0 \cdot 0 = 2\sqrt{2}$$

$$V = 8\sqrt{2}\int_{v=0}^{v=1} \int_{u=0}^{u=\sqrt{1-v^2}} (4 - 4u^2 - 4v^2)dudv$$

$$V = 32\sqrt{2}\int_{v=0}^{v=1} \int_{u=0}^{u=\sqrt{1-v^2}} (1 - u^2 - v^2)dudv$$

פיתרון ג':





$$u = r\cos\alpha \quad , \quad v = r\sin\alpha \qquad => \qquad J_{(\alpha,r)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = r$$

$$V = \iint_S f_{(r\cos\alpha, r\sin\alpha)} \left|J_{(\alpha,r)}\right| dudv = 32\sqrt{2}\int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2}\int_{r=0}^{r=1}(1-r^2)rdrd\alpha =$$

$$= 32\sqrt{2}\int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2}\int_{r=0}^{r=1}(r-r^3)drd\alpha = 32\sqrt{2}\int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\Big|_0^1 d\alpha =\right.$$

$$= 32\sqrt{2}\int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)d\alpha = 8\sqrt{2}\int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2}d\alpha =$$

$$= 8\sqrt{2}(\alpha\Big|_0^{\pi/2} = 8\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 4\sqrt{2}\pi \text{ Cubic units}$$