1. <u>טור אינסופי:</u>

השתמש במבחן האינטגרל כדי להראות שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$ מתכנס.

<u>פיתרון:</u>

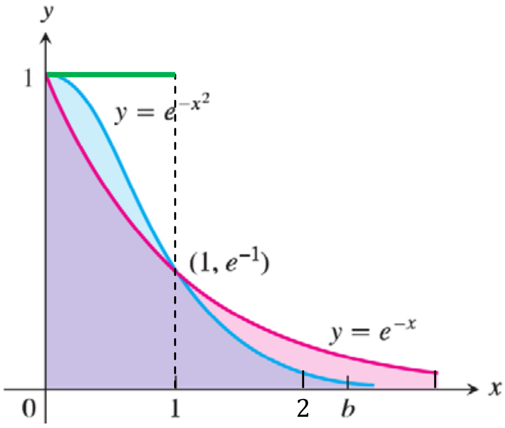
האיור שמשמש לשם הבהרה:

עבור $x \geq 1$ השטח שמתחת לגרף האדום ($y = e^{-x}$) מתכנס ל- $\frac{1}{e}$

ואם כך השטח שמתחת לגרף הכחול ($y = e^{-x^2}$) מתכנס לפחות מכך.

עבור $0 \leq x \leq 1$ השטח שמתחת לגרף הירוק ($y = 1$) שווה 1

ואם כך השטח שמתחת לגרף הכחול ($y = e^{-x^2}$) שווה פחות מכך.



תיאורמה 9 : מבחן האינטגרל

תהי $\{a_n\}$ סדרה שאיבריה חיוביים. נניח ש- $a_n = f_{(n)}$, כאשר $f_{(n)}$ היא פונקציה רציפה, חיובית ויורדת לכל $N \leq x$.

אז הטור $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ והאינטגרל $\int_N^{\infty} f_{(x)}\, dx$ מתכנסים שניהם או מתבדרים שניהם.

האינטגרל המתאים לטור הנתון הינו $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$. עלינו להראות שהוא מתכנס.

עבור $x \geq 1$ אינטגרל ה"גג" $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$ מתכנס:

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} e^{-x} dx = -\lim_{b\to\infty} [e^{-x}]_1^{b} = -\lim_{b\to\infty} [e^{-b} - e^{-1}] = \frac{1}{e}$$

ואם כך האינטגרל $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ לבטח מתכנס (לערך קטן מ- $\frac{1}{e}$).

עבור $0 \leq x \leq 1$ אינטגרל ה"גג" $\int_0^1 1dx$ מתכנס:

$$\int_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1$$

ואם כך האינטגרל $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ לבטח מתכנס (לערך קטן מ- 1).

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx < 1 + \frac{1}{e}$$

לסיכום, $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ מתכנס ולפיכך $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$ מתכנס, ע"פ מבחן האינטגרל.

2. כלל השרשרת:

על ידי הטרנספורמציה הפולרית $x = rcos\theta$ ו- $y = rsin\theta$, הפונקציה $f(x,y)$ עוברת שינוי לְ- $g(r,\theta)$.

מצא את $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ (20 נ') וחשב את ערכה בנקודה $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{2},\frac{\pi}{2})$ בהתקיים $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{1}$

פיתרון:

$$given: \begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = -f_x \cdot r\sin\theta + f_y \cdot r\cos\theta = r\left(f_y \cdot \cos\theta - f_x \cdot \sin\theta\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[r\left(f_y \cdot \cos\theta - f_x \cdot \sin\theta\right)\right] = r \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left(f_y \cdot \cos\theta - f_x \cdot \sin\theta\right) =$$

$$= r \cdot \left(\frac{\partial f_y}{\partial \theta}\cdot\cos\theta - f_y \cdot \sin\theta - \frac{\partial f_x}{\partial \theta}\cdot\sin\theta - f_x \cdot \cos\theta\right) =$$

$$= r \cdot \left(\frac{\partial f_y}{\partial \theta}\cdot\cos\theta - f_y \cdot \sin\theta - \frac{\partial f_x}{\partial \theta}\cdot\sin\theta - f_x \cdot \cos\theta\right) =$$

$$= r \cdot \left[\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\cdot\cos\theta - f_y \cdot \sin\theta - \left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\cdot\sin\theta - f_x \cdot \cos\theta\right] =$$

$$= r \cdot \left[\left(-f_{yx} \cdot r\sin\theta + f_{yy} \cdot r\cos\theta\right)\cdot\cos\theta - f_y \cdot \sin\theta - \left(-f_{xx} \cdot r\sin\theta + f_{xy} \cdot r\cos\theta\right)\cdot\sin\theta - f_x \cdot \cos\theta\right] =$$

$$= r \cdot \left[-f_{yx} \cdot r\sin\theta\cos\theta + f_{yy} \cdot r\cos^2\theta - f_y \cdot \sin\theta - \left(-f_{xx} \cdot r\sin^2\theta + f_{xy} \cdot r\sin\theta\cos\theta\right) - f_x \cdot \cos\theta\right] =$$

$$= r \cdot \left[-f_{yx} \cdot r\sin\theta\cos\theta + f_{yy} \cdot r\cos^2\theta - f_y \cdot \sin\theta + f_{xx} \cdot r\sin^2\theta - f_{xy} \cdot r\sin\theta\cos\theta - f_x \cdot \cos\theta\right]$$

$$given: \quad f_x = f_y = f_{xx} = f_{yy} = 1 \qquad and\ we\ also\ know\ that\ f_{xy} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = r \cdot \left[-2f_{xy} \cdot r\sin\theta\cos\theta + 1 \cdot \left(r\cos^2\theta - \sin\theta + r\sin^2\theta - \cos\theta\right)\right] =$$

$$= r \cdot \left[-f_{xy} \cdot r \cdot 2\sin\theta\cos\theta + r\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) - \sin\theta - \cos\theta\right] =$$

$$= r \cdot \left[-f_{xy} \cdot r\sin 2\theta + r - \sin\theta - \cos\theta\right]$$

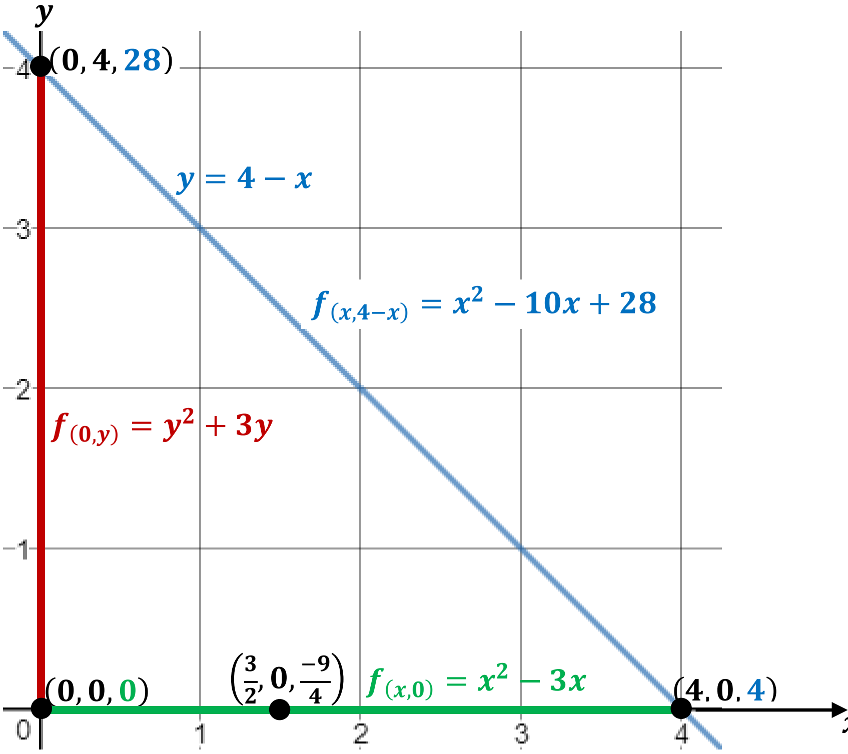
$$\left.\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}\right|_{(r,\theta) = (2,\frac{\pi}{2})} = 2 \cdot \left[-f_{xy} \cdot 2\sin\pi + 2 - \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}\right] = 2$$

3. נקודות קיצון מוחלטים:

מצא מינימום ומקסימום מוחלטים של הפונקציה $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y$ בתחום הסגור,

אשר נוצר ברביע הראשון מחיתוך הישר $x + y = 4$ עם הצירים.

פיתרון:



<u>חקירת תוך התחום הסגור</u>

חישוב הנגזרות החלקיות:

$$f_x = 2x + y - 3$$

$$f_y = x + 2y + 3$$

מציאת נקודות חשודות:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (3,-3)$$

הנקודה החשודה אינה בתחום הנתון, ולכן

<u>תוך התחום</u> אינו רלוונטי.

<u>חקירת גבולות התחום</u>

$$f_{(x,4-x)} = x^2 + x(4-x) + (4-x)^2 - 3x + 3(4-x)$$

$$f_{(x,4-x)} = x^2 - 10x + 28 \quad \Rightarrow \quad x_k = \frac{-b}{2a} = 5$$

זוהי פרבולה "מחייכת" שקודקודה (מינימום) <u>אינו נמצא</u> על המקטע שבציור, לכן נבדוק <u>רק</u> את קצות המקטע :

$$f_{(0,4)} = 0^2 - 10 \cdot 0 + 28 \;=\; 28$$

$$f_{(4,0)} = 4^2 - 10 \cdot 4 + 28 \;=\; 4$$

$$f_{(x,0)} = x^2 - 3x \quad \Rightarrow \quad x_k = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$$

כאן קודקוד (מינימום) הפרבולה <u>נמצא</u> על המקטע שבציור, לכן נבדוק <u>הן את הקודקוד</u> והן את קצות המקטע:

$$f_{\left(\frac{3}{2},0\right)} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{4}$$

קצהו הימני של המקטע נבדק כבר קודם ולכן נותר לבדוק רק את זה השמאלי (ראשית הצירים):

$$f_{(0,0)} = 0^2 - 3 \cdot 0 = 0$$

$$f_{(0,y)} = y^2 + 3y \quad \Rightarrow \quad y_k = \frac{-b}{2a} = -\frac{3}{2}$$

זוהי פרבולה "מחייכת" שקודקודה (מינימום) <u>אינו נמצא</u> על המקטע שבציור וקצות המקטע נבדקו <u>שניהם</u> כבר קודם.

אם כך, המקסימום המוחלט שהתבקשנו למצוא הוא $f_{(0,4)} = 28$ והמינימום המוחלט שהתבקשנו למצוא הוא $f_{\left(\frac{3}{2},0\right)} = -\frac{9}{4}$

4. גרדיאנט, משיק ונורמל:

נתונה המשוואה (של גוף נפחי) $y - sinx = 1$. מצא את קו הרמה מהסוג $f(x,y) = c$ (10 נק').

מצא את משוואת המשיק לקו הרמה (5 נק') ומשוואת הנורמל לקו הרמה (2 נק') בנקודה $P_0(\pi, 1)$.

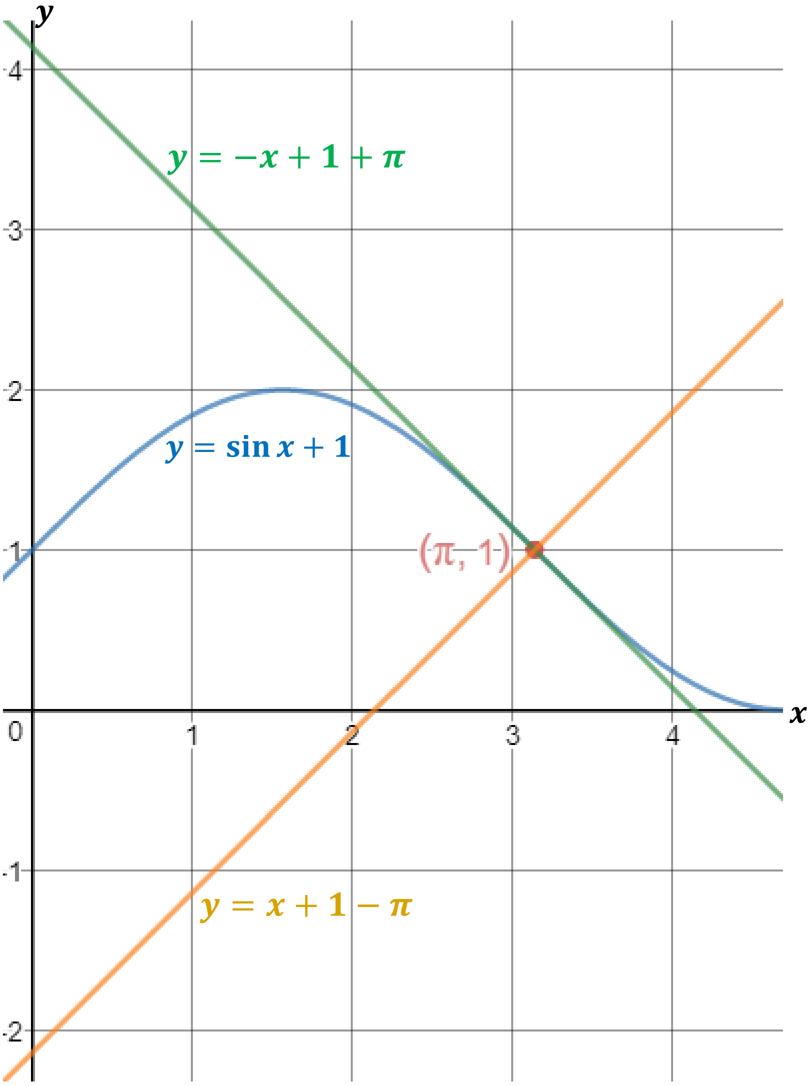
צייר את קו הרמה, המשיק והנורמל בנקודה (6 נקו'). האם ניתן לצייר את ה-$\vec{\nabla} f$ בנקודה? הסבר (2 נ').

פיתרון:

מציאת קו הרמה

משטח הגוף מאונך למישור xy ולכן לכל קווי

הגובה מתאים קו הרמה $y = \sin x + 1$



מציאת משוואת המשיק לקו הרמה

$y'_{(x)} = \cos x \quad => \quad y'_{(\pi)} = \cos \pi = -1$

$y - 1 = -(x - \pi) \quad => \quad y = -x + 1 + \pi$

מציאת משוואת הנורמל לקו הרמה

$y'_{(\pi)} = -1 \quad => \quad m_{Normal} = 1$

$y - 1 = x - \pi \quad => \quad y = x + 1 - \pi$

הגרדיינט $\vec{\nabla} f$

משטח הגוף אינו גזיר כי אינו פונקציה של z.

אי לכך אין לו גרדיינט $(\vec{\nabla} f \to \infty)$.

5. <u>אינטגרל כפול:</u>

נתון הגליל $x^2 + y^2 = 1$. חותכים אותו בין המישורים $z = 0$ ו- $x + y + z = 2$. מצא את נפח המקטע שנוצר.

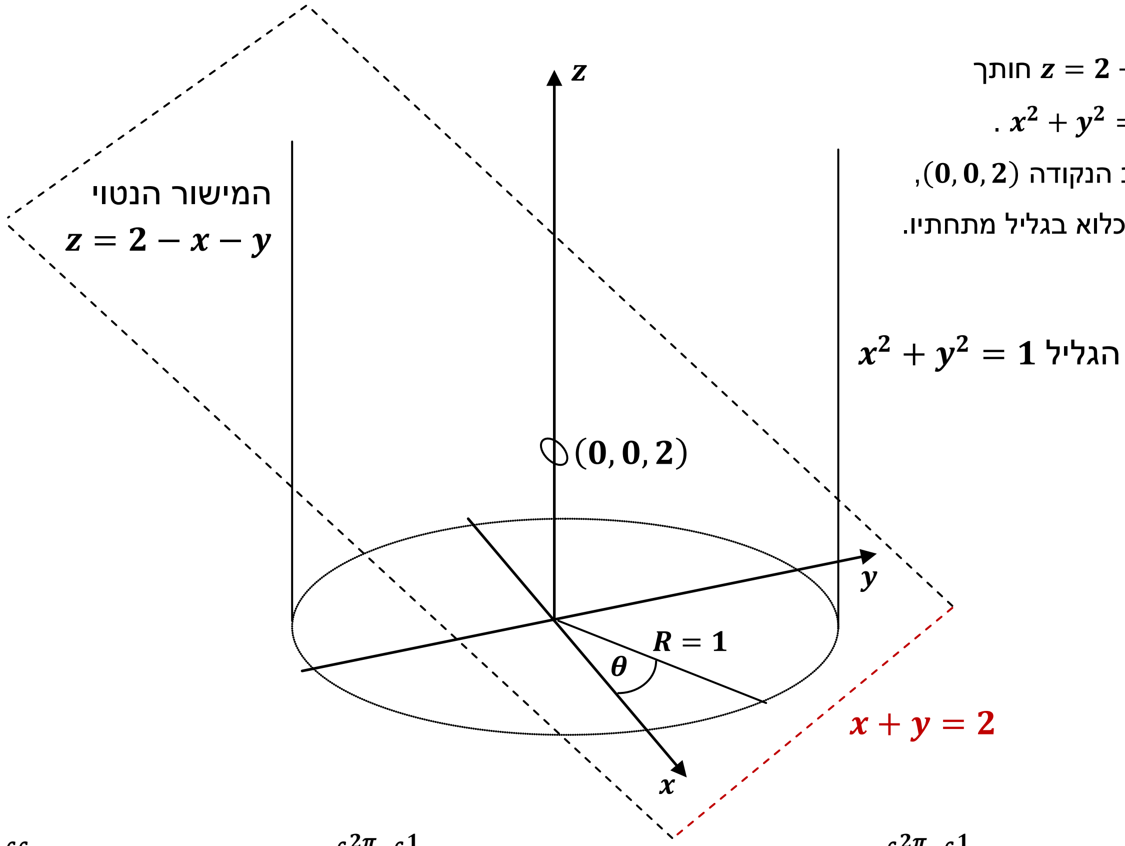
<u>פיתרון</u> :

כדי לקבוע מהו תחום האינטגרציה R, יש לבדוק תחילה היכן חותך המישור הנטוי $z = 2 - x - y$ את מישור xy . נציב $z = 0$ ונקבל על מישור xy את הישר $x + y = 2$. ישר זה אינו חותך את המעגל $x^2 + y^2 = 1$, ואם כך תחום האינטגרציה R הוא <u>כל המעגל</u> הנ"ל שעל מישור xy (ולא רק חלק ממנו).

המשך קל:

$z = -x$ היא פונקציה אי זוגית ולכן יתאפס האינטגרל שלה על התחום הסימטרי $-1 \le x \le 1$ (קיזוז נפח).
$z = -y$ אף היא פונקציה אי זוגית, ולכן יתאפס האינטגרל שלה על התחום הסימטרי $-1 \le y \le 1$ (קיזוז נפח).
אפשר אם כך להחליף את המישור הנטוי $z = 2 - x - y$ במישור האופקי $z = 2$, והנפח לא ישתנה.
במצב זה אפילו אינטגרציה אינה נחוצה, כי כעת מדובר בגליל אשר נפחו $V = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi$.

המישור הנטוי $z = 2 - x - y$ חותך באלכסון את הגליל $x^2 + y^2 = 1$. אם נהפכו לאופקי סביב הנקודה $(0, 0, 2)$, לא ישתנה הנפח אשר כלוא בגליל מתחתיו.



$$\iint_R (2 - x - y)\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2 - r\cos\theta - r\sin\theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 [2r - r^2(\cos\theta - \sin\theta)] dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[r^2 - \frac{r^3}{3}(\cos\theta - \sin\theta)\right|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi}\left[1 - \frac{1}{3}(\cos\theta - \sin\theta)\right] d\theta =$$

$$= \left[\theta - \frac{1}{3}(\sin\theta + \cos\theta)\right|_0^{2\pi} = \left[2\pi - \frac{1}{3}(0+1)\right] - \left[0 - \frac{1}{3}(0+1)\right] = 2\pi \text{ Cubic Units}$$