1. <u>טור אינסופי:</u>

א. האם $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{2n}-\sin\frac{1}{2n+1}\right)$ מתכנס ? הסבר. (12 נק')

$$\sum\left(\sin\frac{1}{2n}-\sin\frac{1}{2n+1}\right) = \sin\frac{1}{2}-\sin\frac{1}{3}+\sin\frac{1}{4}-\sin\frac{1}{5}+\sin\frac{1}{6}-\sin\frac{1}{7}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}-\sin\frac{1}{2n+1}+\cdots$$

זהו טור <u>מתחלף</u> שאיבריו "מתכווצים" לאפס, ואם כך הוא מתכנס לפי קריטריון לייבניץ.

ב. האם $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$ מתכנס? הסבר. (13 נק')

$$\sum\ln\frac{n}{n+1} = \ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}+\ln\frac{4}{5}+\cdots+\ln\frac{n}{n+1}+\cdots = \ln\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\ldots =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{n+1} = \ln 0^{+} = -\infty \quad => \quad diverges$$

2. <u>גבול לפונקציה בעלת שני משתנים וכופלי לגרנז':</u>

א. חשב את הגבול: $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ (10 נקו').

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 0$$

ב. מהן הנקודות על העקומה $x^2+xy+y^2=1$ שהן הקרובות ביותר והרחוקות ביותר מהראשית? (15 נק').

נתאים את הבעיה לתבנית לגרנז' עם $f_{(x,y)}=x^2+y^2$ ו- $g_{(x,y)}=x^2+xy+y^2-1$.

$$\vec{\nabla}f=\lambda\vec{\nabla}g \quad => \quad 2x\hat{x}+2y\hat{y}=\lambda[(2x+y)\hat{x}+(2y+x)\hat{y}] \quad =>$$

$$\begin{cases}2x=\lambda(2x+y)\\2y=\lambda(2y+x)\end{cases} \quad => \quad \frac{x}{y}=\frac{2x+y}{2y+x} \quad => \quad 2xy+x^2=2xy+y^2 \quad => \quad y=\pm x$$

את האפשרות $(x,y)=(0,0)$ אנו שוללים למרות היותה פיתרון של המשוואות, כי הנקודה $(0,0)$ אינה על העקום הנתון.

<u>הערה</u>: חילקתי את המשוואות זו בזו כי כאן $(x,y)\neq(0,0)$, $\lambda\neq 0$.

נציב כעת $y=\pm x$ במשוואה $g_{(x,y)}=0$:

$$x^2+xy+y^2=1 \quad => \quad x^2+x(\pm x)+x^2=1 \quad => \quad 2x^2\pm x^2=1 \quad => \quad \begin{cases}x^2=1\\x^2=1/3\end{cases}$$

פסול $(1\ ,\ 1)$ $(1\ ,-1)$ פסול $(-1\ ,-1)$ $(-1\ ,1)$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ פסול $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ פסול $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

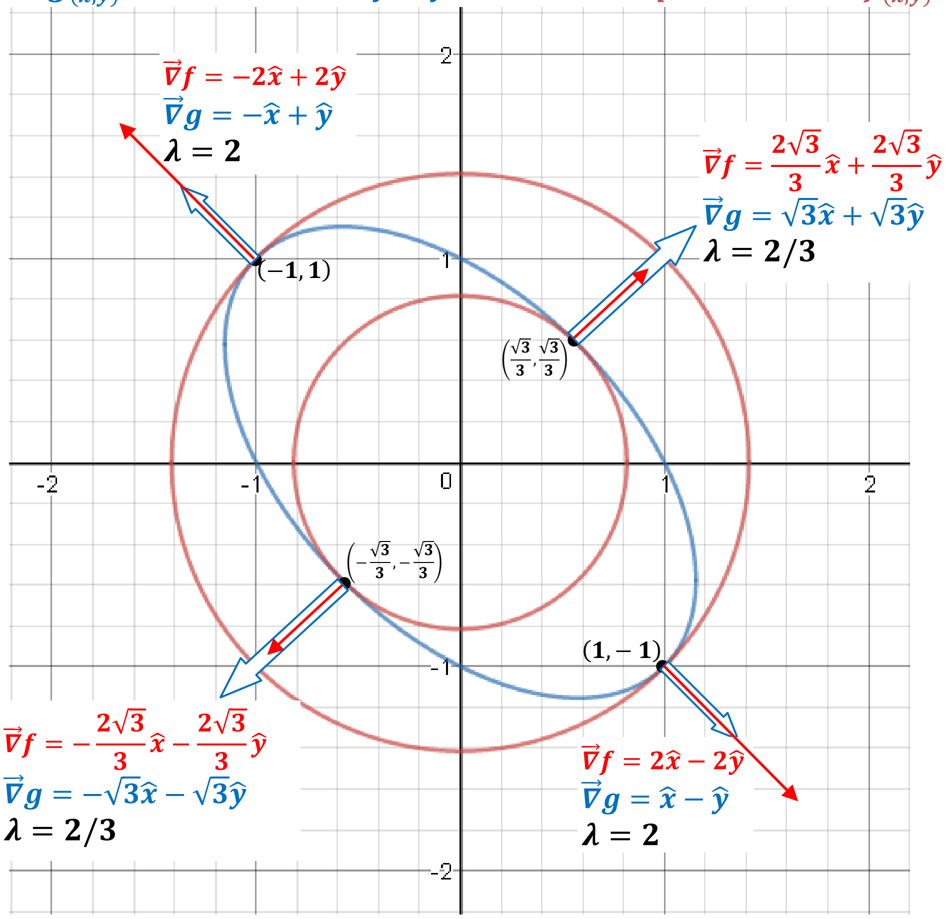
נציב נקודות אלה ב- $f_{(x,y)}=x^2+y^2$ כדי לקבל את ערך המינימום שלה על העקום $x^2+xy+y^2=1$:

$$f_{(\pm1\ ,\ \mp1)}=1+1=2 \qquad , \qquad f_{\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

הנקודות על העקומה $x^2+xy+y^2=1$ שהן הקרובות ביותר לראשית הינן $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

הנקודות על העקומה $x^2+xy+y^2=1$ שהן הרחוקות ביותר מהראשית הינן $(\pm1\ ,\mp1)$.

$$the\ ellipsoid\ \ g_{(x,y)} = 0 \quad => \quad x^2 + xy + y^2 = 1 \qquad , \qquad a\ \ paraboloid\!:\ \ f_{(x,y)} = x^2 + y^2$$



$$\vec{\nabla} f_{(x,y)} = 2x\hat{x} + 2y\hat{y} \quad => \quad \vec{\nabla} f_{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\hat{x} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\hat{y}$$

$$\vec{\nabla} g_{(x,y)} = (2x + y)\hat{x} + (2y + x)\hat{y} \quad => \quad \vec{\nabla} g_{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \sqrt{3}\hat{x} + \sqrt{3}\hat{y}$$

$$\vec{\nabla} f_{(x,y)} = 2x\hat{x} + 2y\hat{y} \quad => \quad \vec{\nabla} f_{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\hat{x} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\hat{y}$$

$$\vec{\nabla} g_{(x,y)} = (2x + y)\hat{x} + (2y + x)\hat{y} \quad => \quad \vec{\nabla} g_{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = -\sqrt{3}\hat{x} - \sqrt{3}\hat{y}$$

$$\vec{\nabla} f_{(x,y)} = 2x\hat{x} + 2y\hat{y} \quad => \quad \vec{\nabla} f_{(-1,1)} = -2\hat{x} + 2\hat{y}$$

$$\vec{\nabla} g_{(x,y)} = (2x + y)\hat{x} + (2y + x)\hat{y} \quad => \quad \vec{\nabla} g_{(-1,1)} = -\hat{x} + \hat{y}$$

$$\vec{\nabla} f_{(x,y)} = 2x\hat{x} + 2y\hat{y} \quad => \quad \vec{\nabla} f_{(1,-1)} = \widehat{2x} - 2\hat{y}$$

$$\vec{\nabla} g_{(x,y)} = (2x + y)\hat{x} + (2y + x)\hat{y} \quad => \quad \vec{\nabla} g_{(1,-1)} = \hat{x} - \hat{y}$$

3. <u>כלל השרשרת:</u>

הוכח את כלל לייבניץ האומר שאם f רציפה בתחום $[a,b]$ ואם $u_{(x)}$ ו- $v_{(x)}$ גזירות בתחום $[a,b]$, אז $\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f_{(v_{(x)})}\frac{dv}{dx} - f_{(u_{(x)})}\frac{du}{dx}$ (המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי עבור גבולות משתנים).

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f_{(t)}dt = \int_{u(x)}^{c} f_{(t)}dt + \int_{c}^{v(x)} f_{(t)}dt = \int_{c}^{v(x)} f_{(t)}dt - \int_{c}^{u(x)} f_{(t)}dt$$

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f_{(t)}dt = \frac{d}{dx}\left(\int_{c}^{v(x)} f_{(t)}dt - \int_{c}^{u(x)} f_{(t)}dt\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\int_{c}^{v(x)} f_{(t)}dt - \frac{d}{dx}\int_{c}^{u(x)} f_{(t)}dt = f_{(v_{(x)})}\cdot\frac{dv}{dx} - f_{(u_{(x)})}\cdot\frac{du}{dx}$$

4. <u>גרדיאנט ונגזרת כיוונית:</u>

האם קיים כיוון $\hat{u}$ שבו קצב השינוי של הפונקציה $f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2$ בנקודה P(1,2) שווה ל-14?

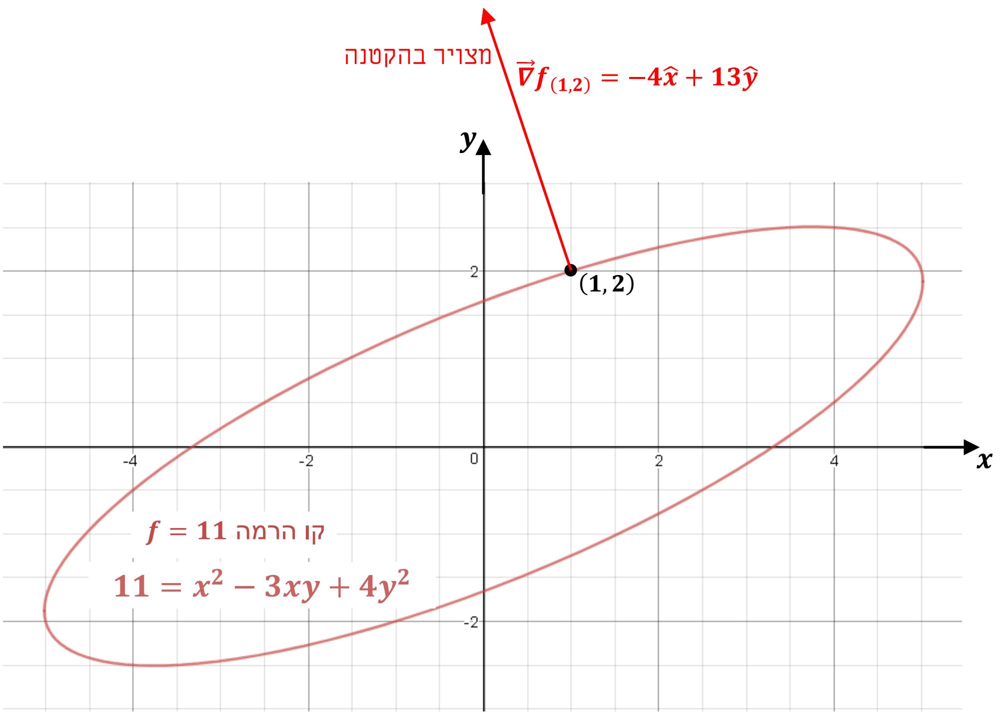
<u>פיתרון</u>: נבדוק אם הגרדיינט בנקודה הנ"ל גדול או שווה ל- 14 .

אם כך הוא, אז התשובה היא כן, משום שבמהלך סטייה הדרגתית מכיוון הגרדיינט, יפחת <u>באופן רציף</u> קצב השינוי של הפונקציה עד ש"מתישהו" יִשווה ל-14.

$$\vec{\nabla}f_{(x,y)} = (2x-3y)\hat{x} + (8y-3x)\hat{y} \quad => \quad \vec{\nabla}f_{(1,2)} = -4\hat{x} + 13\hat{y} \quad =>$$

$$=> \quad \left|\vec{\nabla}f_{(1,2)}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 13^2} = \sqrt{185} < 14$$

ובכן, התשובה היא לא. קצב השינוי המרבי של הפונקציה פחות מ-14.



באיור שמשמאל מצויר הגרדיינט של f בנקודה $(1,2,11)$.

גודלו הוא $\left|\vec{\nabla}f_{(1,2)}\right| = \sqrt{185}$

וכיוונו צפון-צפון מערב.

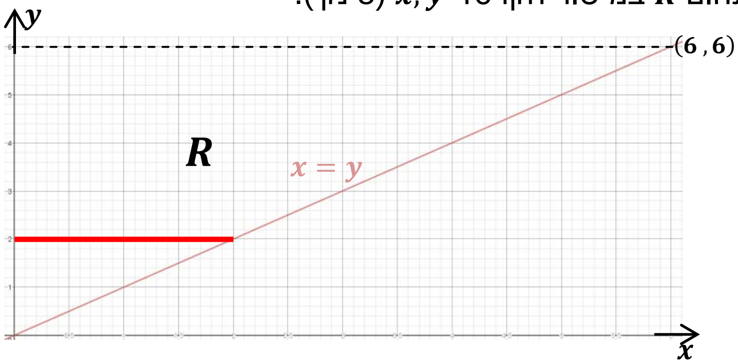
אם כך, בנקודה $(1,2,11)$ קצב השינוי <u>המרבי</u> של f הוא $\sqrt{185}$,

והוא מתקבל בכיוון צפון-צפון מערב.

בכל כיוון אחר בו ננוע על משטח הפונק' מהנקודה $(1,2,11)$, יהיה קצב השינוי שלה נמוך מ- $\sqrt{185}$.

5. אינטגרל כפול: מעבר מקרטזי לפולארי

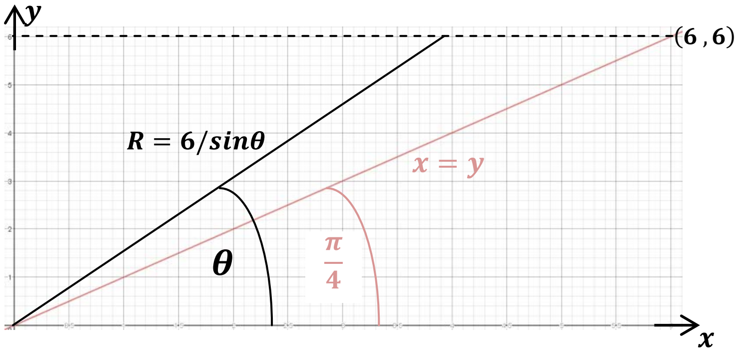
א. חשב את $\int_0^6 \int_0^y xdxdy$ (5 נק') ושרטט את התחום R במישור הקרטזי x,y (5 נק').

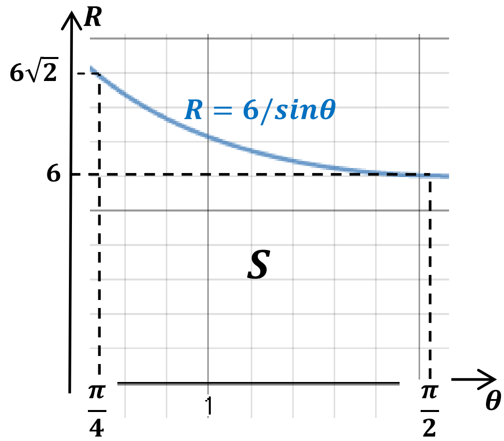


$$\int_0^6 \int_0^y xdxdy = \frac{1}{2}\int_0^6 x^2 \Big|_0^y dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^6 y^2 dy = \frac{1}{6} y^3 \Big|_0^6 = 36$$

ב. שרטט את התחום S במישור הקרטזי θ, r (5 נק') וחשב את האינטגרל בקורדינטות פולאריות (10 נק').





$$xdxdy = rcos\theta rdrd\theta = r^2dr \cdot cos\theta d\theta$$

$$\int_0^6 \int_0^y xdxdy = \int_{\pi/4}^{\pi/2} cos\theta d\theta \int_0^{6/sin\theta} r^2 dr$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} cos\theta d\theta \int_0^{6/sin\theta} r^2 dr = \frac{1}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} cos\theta d\theta \cdot r^3 \Big|_0^{6/sin\theta} = \frac{1}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{216}{sin^3\theta} cos\theta d\theta = 72\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{cos\theta}{sin^3\theta} d\theta$$

$$\begin{cases} u = sin\theta \\ du = cos\theta d\theta \end{cases} => \quad 72\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{du}{u^3} = -72\int_1^{\sqrt{2}/2} u^{-3} du = 36 \frac{1}{u^2}\Bigg|_1^{\sqrt{2}/2} = 36(2-1) = 36$$