1. טורים אינסופיים:

א. חשב את $\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \cdots$ (12 נק').

פיתרון א' :

ראשית, זהו טור מתחלף שאיבריו שואפים לאפס, כך שהוא לבטח מתכנס (לייבניץ).

שנית, אם נתבונן בטור מקלורן של $\sin x$, נבחין כי זהו בעצם הטור הנתון כאשר $x = \pi$.

$$\sin x \quad = \quad x - \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \frac{1}{5!}\cdot x^5 - \frac{1}{7!}\cdot x^7 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1} + \cdots$$

$$\sin \pi \quad = \quad \pi - \frac{1}{3!}\cdot \pi^3 + \frac{1}{5!}\cdot \pi^5 - \frac{1}{7!}\cdot \pi^7 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot \pi^{2n+1} + \cdots \quad = \quad 0$$

ב. חשב את הגבול $\lim_{x\to 2}\frac{e^x - e^2}{x-2}$ תוך שימוש בטור חזקות אשר מתאים לבעיה (13 נק').

פיתרון ב' :

כדאי להחליף את $f_{(x)} = e^x$ אשר במונה, בטור טיילור שלה **<u>סביב</u>** $\underline{a = 2}$. מדוע?

א) כי אז האיבר הראשון בטור יהיה $f_{(2)} = e^2$ ויתבצע קיזוז עם ה- $-e^2$ שמופיע במונה .

ב') כי לצורך ההחלפה יספיקו שני האיברים הראשונים של הטור - שאר האיברים ישאפו לאפס **מהר** ויהיו זניחים.

$$f_{(x)} \quad = \quad f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n + \cdots$$

$$e^x \quad = \quad e^2 + e^2\cdot(x-2) + \frac{e^2}{2!}\cdot(x-2)^2 + \cdots + \frac{e^2}{n!}\cdot(x-2)^n + \cdots$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^x - e^2}{x-2} \quad = \quad \lim_{x\to 2}\frac{e^2 + e^2(x-2) - e^2}{x-2} \quad = \quad \lim_{x\to 2}\frac{e^2(x-2)}{x-2} \quad = \quad \lim_{x\to 2} e^2 \quad = \quad e^2$$

2. גבול לפונקציה בעלת שני משתנים ודיפרנציאל שלם:

א. חשב את הגבול: $lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$ תוך תנועה לאורך הפרבולה $y = x^2$ (4 נק') ולאורך הישר $3y = x$ (3 נק'). מה המסקנה? (3 נק').

פיתרון א' :

$$\lim_{(x,x^2)\to(0,0)}\frac{2x^2-(x^2)^2}{x^2+2(x^2)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2-x^4}{x^2+2x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(2-x^2)}{x^2(1+2x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{2-x^2}{1+2x^2} = 2$$

$$\lim_{(3y,y)\to(0,0)}\frac{2(3y)^2-y^2}{(3y)^2+2y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{18y^2-y^2}{9y^2+2y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{17y^2}{11y^2} = \frac{17}{11}$$

המסקנה היא שלא כל הדרכים מוליכות לרומא, ולכן הגבול המבוקש אינו קיים.

ב. גוף נע על פני חצי כדור עליון (מעל למישור *xy*) שרדיוסו $\sqrt{3}$ ומרכזו בראשית, מהנקודה בה $x = 1$, $y = 1$, אל הנקודה בה $x = 1.001$, $y = 0.9$.

מצא את הפרש הגובה בין הנקודות תוך שימוש בדיפרנציאל השלם. (15 נק').

פיתרון ב' :

$$\Delta z = z_x\cdot\Delta x + z_y\cdot\Delta y \quad , \quad \Delta x = 1.001 - 1 = 0.001 \quad , \quad \Delta y = 0.9 - 1 = -0.1$$

כדי למצוא את z_x ו- z_y , עלינו לרשום את משוואת הכדור ולגוזרה בהתאמה - פעם לפי x ופעם לפי y :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

מוצא   יעד

$$x^2+y^2+z^2 = 3 \;\; => \;\; z_{(x,y)} = \sqrt{3-x^2-y^2} \;\; => \;\; (1,1,1) \;\; , \;\; (1.001, 0.9, 1.08995)$$

$$z_{x(x,y)} = \frac{-x}{\sqrt{3-x^2-y^2}} \quad , \quad z_{y(x,y)} = \frac{-y}{\sqrt{3-x^2-y^2}}$$

$$z_{x(1,1)} = \frac{-1}{\sqrt{3-1^2-1^2}} = -1 \quad , \quad z_{y(1,1)} = \frac{-1}{\sqrt{3-1^2-1^2}} = -1$$

$$\Delta z_{(1,1)} = z_{x(1,1)}\cdot\Delta x + z_{y(1,1)}\cdot\Delta y = -1\cdot 0.001 + (-1)\cdot(-0.1) = 0.099$$

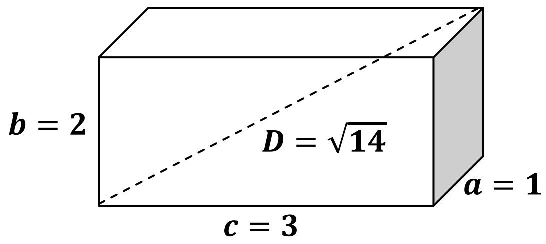
ע"פ הדיפ' השלם, הפרש הגובה הוא **0.099** יחידות אורך. זהו קירוב (גרוע) להפרש המדויק – **0.08995366874**

3. כלל השרשרת + לגרנז':

א. תיבה מלבנית שצלעותיה a, b ו- c משתנות כתלות בזמן.

ברגע מסוים a=1, b=2 ו- c=3 מטר, $da/dt = db/dt = 1$ ו- $dc/dt = -3$ מטר לשנייה.

מהו קצב שינוי אלכסון התיבה באותו הרגע? (10נק')



פתרון א' :

על פי פיתגורס במרחב :

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$D = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \quad => \quad D = \sqrt{14}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dD}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dD}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \frac{dD}{dc} \cdot \frac{dc}{dt} = \frac{dD}{da} \cdot 1 + \frac{dD}{db} \cdot 1 + \frac{dD}{dc} \cdot (-3) = \frac{dD}{da} + \frac{dD}{db} - 3\frac{dD}{dc}$$

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad => \quad \frac{dD}{da} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad , \quad \frac{dD}{db} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad , \quad \frac{dD}{dc} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dD}{da} + \frac{dD}{db} - 3\frac{dD}{dc} = \frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{2}{\sqrt{14}} - 3\frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{-6}{\sqrt{14}} m/s$$

ב. הציון בבחינה נתון על ידי $f(x,y) = 77 - 2x - y$ כאשר $\sqrt{x}$ שעות מוקדשות ללימוד התיאוריה ו- $2\sqrt{y}$ שעות מוקדשות לתרגול. אם הסטודנט השקיע בהכנה לבחינה 9 שעות סה"כ, ואם ציון עובר הוא 60, האם כדאי לסטודנט לגשת לבחינה? הסבר תוך שימוש בלגרנז' (15 נק').

פתרון ב' :

עלינו לחפש את נקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה $f(x,y) = 77 - 2x - y$ תחת התנאי שנקודות אלה נמצאות גם על פונקציית האילוץ $g_{(x)} = \sqrt{x} + 2\sqrt{y} - 9 = 0 \quad <= \quad \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 9$.

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \quad => \quad -2\hat{x} - \hat{y} = \lambda\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{y}}\hat{y}\right) \quad =>$$

$$=> \quad \begin{cases} -2 = \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}} \\ -1 = \dfrac{\lambda}{\sqrt{y}} \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} -4\sqrt{x} = \lambda \\ -\sqrt{y} = \lambda \end{cases} \quad => \quad 4\sqrt{x} = \sqrt{y}$$

נציב בפונקציית האילוץ :

$$\sqrt{x} + 2 \cdot 4\sqrt{x} = 9 \quad => \quad \sqrt{x} = 1hr \quad => \quad \sqrt{y} = 4hr$$

לאור זאת, הציון שיקבל הסטודנט הינו $f(1,16) = 77 - 2 \cdot 1 - 16 = 59$.

לסטודנט לא כדאי לגשת לבחינה כי הוא לא יעבור אותה.

4. גרדיאנט ונגזרת כיוונית:

הפונקציה z כתלות ב-x ו-y מוגדרת בצורה סתומה באופן: $xsiny + ysinz + zsinx = \frac{3\pi}{2}$.

א. חשב את הגרדיאנט של z (10 נק'). חשב את הגרדיאנט של z בנקודה $P(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ (10 נק').

פיתרון א' :

$$siny + y \cdot cosz \cdot z_x + (z_x \cdot sinx + z \cdot cosx) = 0 \qquad => \qquad z_x = -\frac{siny + z \cdot cosx}{y \cdot cosz + sinx}$$

$$x \cdot cosy + \left(1 \cdot sinz + y \cdot cosz \cdot z_y\right) + z_y \cdot sinx = 0 \qquad => \qquad z_y = -\frac{sinz + x \cdot cosy}{y \cdot cosz + sinx}$$

$$\vec{\nabla} z = z_x\hat{x} + z_y\hat{y} = -\frac{siny + z \cdot cosx}{y \cdot cosz + sinx}\hat{x} - \frac{sinz + x \cdot cosy}{y \cdot cosz + sinx}\hat{y}$$

$$\vec{\nabla} z_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{sin\frac{\pi}{2} + z \cdot cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} \cdot cosz + sin\frac{\pi}{2}}\hat{x} - \frac{sinz + \frac{\pi}{2} \cdot cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} \cdot cosz + sin\frac{\pi}{2}}\hat{y} = \frac{-1}{\frac{\pi}{2} \cdot cosz + 1}\hat{x} - \frac{sinz}{\frac{\pi}{2} \cdot cosz + 1}\hat{y}$$

כדי לחשב את $z_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}$, עלינו לפתור את המשוואה הנתונה $xsiny + ysinz + zsinx = \frac{3\pi}{2}$, כאשר $x = y = \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{2}sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}sinz + zsin\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \qquad => \qquad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}sinz + z = \frac{3\pi}{2} \qquad => \qquad \frac{\pi}{2}sinz + z = \pi$$

משוואה כזו אנו יודעים לפתור רק בניחוש. קל לראות ש- $z = \frac{\pi}{2}$ מקיים אותה: $\frac{\pi}{2}sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, ואם כך,

$$\vec{\nabla} z_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-1}{\frac{\pi}{2} \cdot cos\frac{\pi}{2} + 1}\hat{x} - \frac{sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} \cdot cos\frac{\pi}{2} + 1}\hat{y} = -\hat{x} - \hat{y}$$

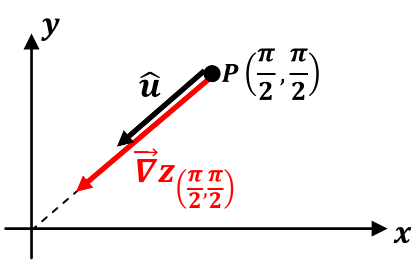
חשב את הנגזרת הכיוונית של z בנקודה $P\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ בכיוון הראשית (5 נק').

פיתרון ב' :

על פי תוצאת הסעיף הקודם, כיוון הגרדיינט של z בנקודה $P\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ הוא דרום – מערב (חץ אדום באיור).

זהו "במקרה" גם הכיוון מהנקודה P אל הראשית (חץ שחור באיור), ולכן אין הכרח לערוך חישוב -

הנגזרת הכיוונית המבוקשת שווה לגודלו של הגרדיינט מהסעיף הקודם - $\sqrt{2}$.



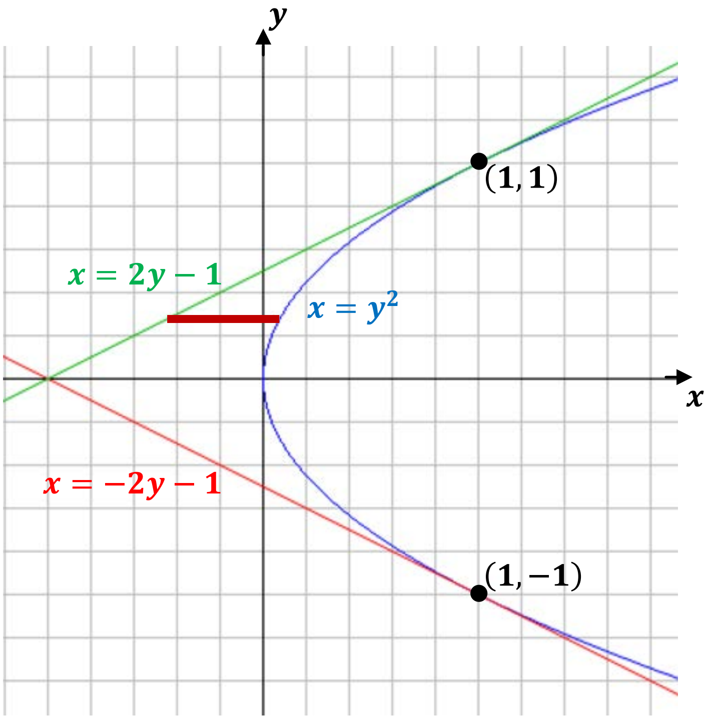
בכל זאת נחשב כדי להיות בטוחים:

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)_{\hat{u},P} = \hat{u} \cdot \vec{\nabla} z_{(P)} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y}\right)(-\hat{x} - \hat{y}) = \sqrt{2}$$

5. אינטגרל כפול:

חשב את $\iint_R xy^2\,dxdy$, כש- R הוא האזור החסום על ידי גרף הפונקציה $x = y^2$ ועל ידי המשיקים לגרף הפונקציה הזאת בנקודות (1,1) ו- (1,-1).

פיתרון :



$$x = y^2 \quad => \quad \frac{dx}{dy} = 2y \quad => \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=1} = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$$

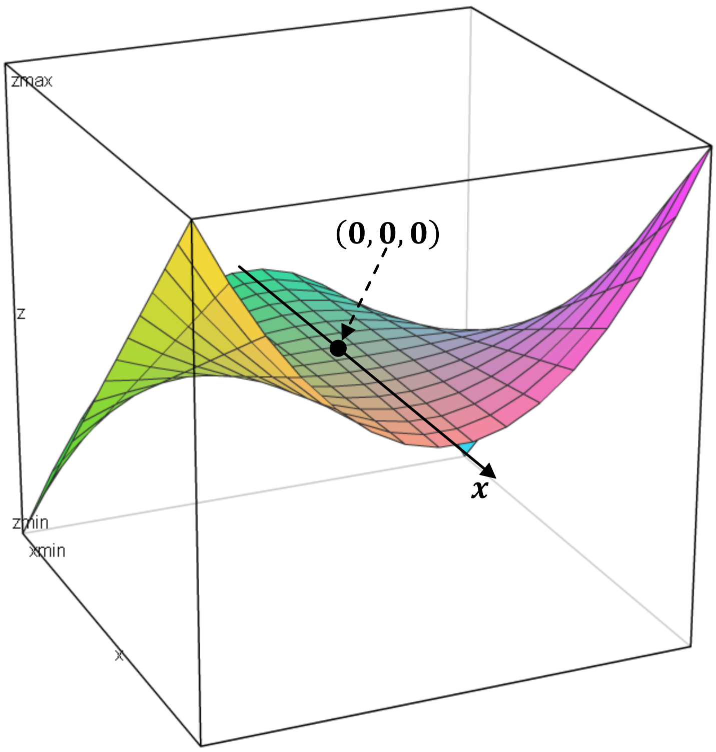
$$y - 1 = \frac{1}{2}(x-1) \quad => \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=-1} = \frac{1}{2\cdot(-1)} = -\frac{1}{2}$$

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x-1) \quad => \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

עדיף "קירות שוכבים", ז"א קודם אינטגרציה לפי x ואח"כ לפי y , כי אז אין צורך לפצל את תחום האינטגרציה.

חוץ מזה האינטגרנד זוגי מבחינת y , כך שאפשר לסכום מ- $y = 0$ ובתמורה "לקחת פעמיים".



$$\iint_R xy^2\,dxdy = 2\int_0^1 \int_{2y-1}^{y^2} xy^2\,dxdy =$$

$$= \int_0^1 x^2y^2 \Big|_{2y-1}^{y^2} dy =$$

$$= \int_0^1 [y^4 - (2y-1)^2]y^2 dy =$$

$$= \int_0^1 [y^4 - 4y^2 + 4y - 1]y^2 dy =$$

$$= \int_0^1 [y^6 - 4y^4 + 4y^3 - y^2]dy =$$

$$= \left[\frac{y^7}{7} - \frac{4y^5}{5} + y^4 - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{7} - \frac{4}{5} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{105}$$