<u>טורים אינסופיים</u>

האם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k^6+2k}}$ מתכנס? הסבר כל שלב.

דרך א' – מבחן השוואה

נבדוק ראשית אם $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, ז"א אם איברי הטור "מתכווצים" ל- 0 כאשר מיקומם בטור "גדול מאוד".
אם לא כך הוא , הטור לבטח מתבדר. אם כך הוא , **ייתכן** שהטור מתכנס ואז נתקדם הלאה.

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt{k^6+2k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k^2}{k^6+2k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k}{k^5+2}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{1}{k^4+\frac{2}{k}}} = \sqrt{\frac{1}{\infty+0}} = 0$$

קיבלנו $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, שהינו כאמור תנאי הכרחי **אך לא מספיק** לקביעת התכנסותו של טור.
נתקדם הלאה.

דרך א' - מבחן השוואה:

עבור $1 \le k$ מתקיים $\frac{k}{\sqrt{k^6+2k}} < \frac{k}{\sqrt{k^6}} = \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$, ולכן הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ מהווה "גג" לטור הנדון.

כמו כן, הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ הינו טור **p** מתכנס, כי מתקיים בו התנאי **1< p** .

מצאנו טור מתכנס אשר מהווה גג לטור הנדון, ואם כך הטור הנדון לבטח מתכנס, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k^6+2k}}$ מתכנס.

דרך ב' – מבחן האינטגרל

אנו רוצים לבדוק אם $\int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^6+2x}} dx$ מתכנס. אם הוא מתכנס אז גם $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k^6+2k}}$ מתכנס ע"פ מבחן האינטגרל.

מאחר שהאינטגרל הנ"ל קשה לפיתרון, נחפש אינטגרנד פשוט יותר אשר יהווה "גג" ל- $\frac{x}{\sqrt{x^6+2x}}$.

עבור $1 \le x$ מתקיים $\frac{x}{\sqrt{x^6+2x}} < \frac{x}{\sqrt{x^6}} = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$, ומכך נובע שהפונקציה $f_{(x)} = \frac{1}{x^2}$ משמשת "גג"

לפונקציה $g_{(x)} = \frac{x}{\sqrt{x^6+2x}}$. נבדוק כעת אם $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ מתכנס. אם כן, אז $\int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^6+2x}} dx$ מתכנס לבטח.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = -\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1}\right) = -(0-1) = 1$$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ מתכנס (ל- 1) <= $\int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^6+2x}} dx$ מתכנס (לפחות מ- 1) <= $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k^6+2k}}$ מתכנס.

חשב את הגבול: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)$.

<u>פיתרון</u>

המשתנים הינם בערך מוחלט/בריבוע כך שמדובר בפונקציה זוגית - נקבל תוצאה זהה עבור כ"א מהמקרים :

$(0,0) < (x,y)$, $(x,y) < (0,0)$, $0 < x\,,\ y < 0$, $x < 0\,,\ 0 < y$

נבחר את המקרה $(0,0) < (x,y)$: $\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \arctan\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right)$.

כדי לחשב את הגבול הנ"ל די להבין שהמכנה שואף לאפס מהר מהמונה ולכן הארגומנט $\frac{x+y}{x^2+y^2}$ שואף לאינסוף.

אינסוף הינו כידוע הטנגנס של $\frac{\pi}{2}$ רדיאנים, והרי לנו התשובה.

למרות זאת, נחשב כעת את $\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \arctan\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right)$ בדרך פורמאלית כדי לשכנע את הספקנים:

ראשית נעבור מקואורדינאטות קרטזיות לפולאריות באמצעות ההצבות: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$:

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\theta + r\sin\theta}{r^2} = \frac{r\,(\cos\theta + \sin\theta)}{r^2} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{r}$$

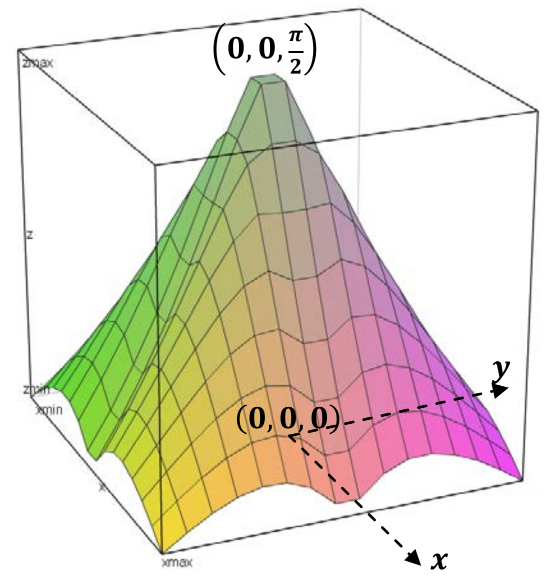
$$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \arctan\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) = \lim_{\substack{r\to 0^+\\ 0\le\sin\theta\\ 0\le\cos\theta}} \arctan\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{r}\right)$$

כאשר $(x,y) \to (0,0)$, $r \to 0^+$. זה נכון תמיד, ללא קשר לכיוון שממנו $(x,y) \to (0,0)$.

אנחנו מחשבים את הגבול עבור $(0,0) \le (\cos\theta\,,\ \sin\theta)$, ז"א $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (הרביע הראשון).

במצב זה מתקיים $0 < \sin\theta + \cos\theta$. ($\sin\theta$ ו- $\cos\theta$ לעולם אינם מתאפסים <u>באותה</u> הזווית).

$$\lim_{\substack{r\to 0^+\\ 0\le\sin\theta\\ 0\le\cos\theta}} \arctan\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{r}\right) = \lim_{r\to 0^+} \arctan\left(\frac{k}{r}\right)\Big|_{0<k} = \arctan\left(\frac{k}{0^+}\right)\Big|_{0<k} = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$



משטח הפונקציה

$$f_{(x,y)} = \arctan\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)$$

שואף מעלה לעבר הנקודה $\left(0,0,\frac{\pi}{2}\right)$ אך אינו מוגדר בה.

כדי לגלות זאת בחרנו להתקרב לציר Z מתחום הרביע

הראשון (מסומן באיור), מתוך הבנה שבשל זוגיות

הפונקציה אין זה משנה מאיזה רביע נעשה זאת.

דוגמה מהספר (עמ' 1044) – מציאת ערכי קיצון של פונקציה על מעגל.

מצא את ערכי המקסימום והמינימום של הפונקציה $f_{(x,y)} = 3x + 4y$ על המעגל $x^2 + y^2 = 1$.

פיתרון: אנו מתאימים את הבעיה לתבנית לגרנז' עם $f_{(x,y)} = 3x + 4y$ ו- $g_{(x,y)} = x^2 + y^2 - 1$, ומחפשים את הערכים של x , y ו- λ אשר מקיימים את המשוואות $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$ ו- $g_{(x,y)} = 0$

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \quad \Rightarrow \quad 3\hat{x} + 4\hat{y} = \lambda(2x\hat{x} + 2y\hat{y}) \quad \Rightarrow \quad 3\hat{x} + 4\hat{y} = 2\lambda x\hat{x} + 2\lambda y\hat{y} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2\lambda} \ , \ y = \frac{2}{\lambda}$$

$$g_{(x,y)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 25 = 4\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{5}{2}$$

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \pm\frac{3}{5} \quad , \quad y = \frac{2}{\lambda} = \pm\frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \ , \ \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \ , \ \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \ , \ \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

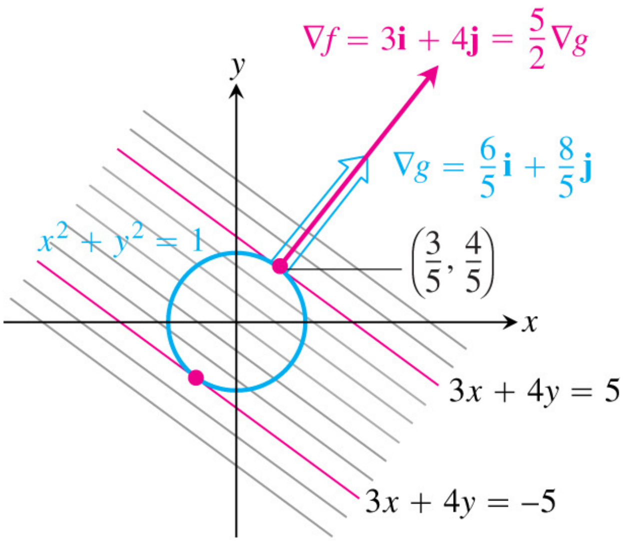
נציב נקודות אלה ב- $f_{(x,y)}$ כדי לקבל את ערכי המקסימום והמינימום שלה על המעגל $x^2 + y^2 = 1$:

$$f_{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)} = 3 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \frac{4}{5} = 5 \quad , \quad f_{\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)} = 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

$$f_{\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)} = 3 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{7}{5} \quad , \quad f_{\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)} = 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 4 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -5$$

אם כן, ערכי המקסימום והמינימום של הפונקציה $f_{(x,y)} = 3x + 4y$ על המעגל $x^2 + y^2 = 1$ הם 5 ו- 5- בהתאמה.

<u>הפיתרון במבט גיאומטרי.</u>



קווי הרמה של $f_{(x,y)} = 3x + 4y$ הם הישרים $3x + 4y = c$.

על ישרים רחוקים מהראשית f גדולה יותר (בערכה המוחלט).

אנו מעוניינים בערכי הקיצון של $f_{(x,y)}$ תחת התנאי שהנקודה (x, y) נמצאת גם על המעגל $x^2 + y^2 = 1$. מבין כל הישרים אשר חותכים את המעגל, אילו הם הרחוקים ביותר מהראשית?

אלה אשר משיקים למעגל. הם הרחוקים ביותר מהראשית.

בנקודות ההשקה, וקטור אשר מאונך לישר מאונך גם למעגל,

כך ש- $\vec{\nabla} f = 3\hat{x} + 4\hat{y}$ הינו כפולה ($\lambda = \pm\frac{5}{2}$) של $2x\hat{x} + 2y\hat{y}$.

בנק' $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\vec{\nabla} f = 3\hat{x} + 4\hat{y}$, $\vec{\nabla} g = \frac{6}{5}\hat{x} + \frac{8}{5}\hat{y}$, ו- $\vec{\nabla} f = \frac{5}{2}\vec{\nabla} g$.

הערך המקסימאלי שמקבלת הפונקציה $f_{(x,y)} = 3x + 4y$ על המעגל $x^2 + y^2 = 1$ הוא 5, וזה קורה בנקודה $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

הערך המינימאלי שהיא מקבלת על המעגל הוא 5-, והדבר קורה בנקודה $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

בשתי נקודות אלה שעל המעגל, ורק בשתי אלה, $\vec{\nabla} f$ הינו כפולה סקלרית של $\vec{\nabla} g$.

בציור מוראים שני הגרדיינטים האלה בנקודת המקסימום של f על המעגל, אך לא בנקודת המינימום שלה.

כלל השרשרת:

נתון: $z = xf^2\left(\sqrt{x}+y\right) - xg\left(x-\sqrt{y}\right)$

רשום: $u=\sqrt{x}+y$ ו- $v=x-\sqrt{y}$.

מצא את $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ במונחים של x, y, f, g ונגזרותיהם לפי u ו- v.

פיתרון:

$$z = x\left[f^2\left(u_{(x,y)}\right) - g\left(v_{(x,y)}\right)\right]$$

נהפוך את סדר הגזירה, ז"א נגזור את z קודם לפי x ואח"כ לפי y. מדובר בנגזרת של מכפלה:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x}\cdot\left[f^2(u)-g(v)\right] + x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[f^2(u)-g(v)\right] =$$

$$1\cdot\left(f^2-g\right) + x\cdot\left(2f\cdot\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial x}\right) =$$

$$f^2-g + x\cdot\left(2f\cdot\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{dg}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$

$$f^2-g + x\cdot\left(2f\cdot f_u\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-g_v\cdot 1\right) =$$

$$f^2-g + \sqrt{x}\cdot f\cdot f_u - x\cdot g_v$$

כעת נגזור לפי y :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(f^2-g+\sqrt{x}\cdot f\cdot f_u - x\cdot g_v\right) =$$

$$2f\cdot\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x}\cdot f\cdot f_u\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(x\cdot g_v\right) =$$

$$2f\cdot\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{dg}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\sqrt{x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(f\cdot f_u\right)-x\cdot\frac{\partial g_v}{\partial y} =$$

$$2f\cdot f_u\cdot 1 - g_v\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)+\sqrt{x}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}f\cdot f_u + f\cdot\frac{\partial}{\partial y}f_u\right)-x\cdot\frac{\partial g_v}{\partial y} =$$

$$2f\cdot f_u+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot g_v+\sqrt{x}\cdot\left(\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot f_u + f\cdot\frac{df_u}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)-x\cdot\frac{dg_v}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$2f\cdot f_u+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot g_v+\sqrt{x}\cdot\left(f_u\cdot 1\cdot f_u+f\cdot f_{uu}\cdot 1\right)-x\cdot g_{vv}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) =$$

$$2f\cdot f_u+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot g_v+\sqrt{x}\cdot\left({f_u}^2+f\cdot f_{uu}\right)+\frac{x}{2\sqrt{y}}\cdot g_{vv}$$

דוגמה מהספר (עמ' 1130) – שימוש בהצבה לצורך אינטגרציה.

חשב את $\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,(y-2x)^2dydx$ תוך מעבר לקואורדינאטות חדשות כך ש- $u=x+y$ ו- $v=y-2x$.

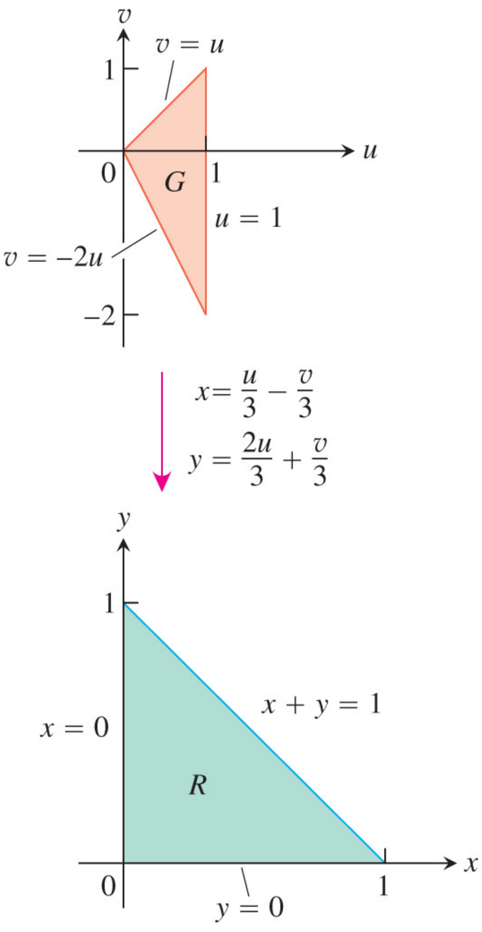
פיתרון:

פתרון שתי המשוואות הינו $x=\frac{u-v}{3}$ ו- $y=\frac{2u+v}{3}$.

נציב ביטויים האלה במשוואות הגבולות של R כדי לקבל את הגבולות של G:

משוואות uv מפושטות	משוואות uv עבור הגבולות של G	משוואות xy עבור הגבולות של R
$v=u$	$\frac{u-v}{3}=0$	$x=0$
$v=-2u$	$\frac{2u+v}{3}=0$	$y=0$
$u=1$	$\frac{2u+v}{3}=1-\frac{u-v}{3}$	$y=1-x$

שימו לב! כאן R הוא משולש ולכן ישנן בטבלה שלוש שורות. שוב - **מומלץ לשרטט את** R כדי לקבל תמונה ברורה.



היעקוביאן במקרה זה הינו

$$J_{(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u-v}{3}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u-v}{3}\right)\\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{2u+v}{3}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2u+v}{3}\right)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}$$

וכעת למשוואת ההתמרה

$$\iint_R f_{(x,y)}\,dydx = \iint_G f_{[g(u,v),h(u,v)]}\left|J_{(u,v)}\right|dvdu \Rightarrow$$

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,(y-2x)^2dydx = \int_0^1\int_{v=-2u}^{v=u}\sqrt{u}\,v^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)dvdu =$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^1\sqrt{u}\,v^3\Big|_{v=-2u}^{v=u}\cdot du = \frac{1}{9}\int_0^1\sqrt{u}\,(u^3+8u^3)du =$$

$$=\int_0^1\sqrt{u}\,u^3du = \int_0^1 u^{7/2}\,du = \tfrac{2}{9}u^{9/2}\Big|_{u=0}^{u=1} = \frac{2}{9}(1-0)=\frac{2}{9}$$

האיור ממחיש כיצד המשוואות $x=\frac{u-v}{3}$ ו- $y=\frac{2u+v}{3}$ מתמירות את G ל- R.

הפיכת ההתמרה באמצעות המשוואות $u=x+y$ ו- $v=y-2x$, מתמירה את R ל- G.