מצא בעזרת כופלי לגרנז' את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר

של $f(x,y)=x^2+y^2$ על האליפסה $(x-y)^2+\frac{1}{2}(x+y)^2=1$

תשובה:

$f_{max}=$

$f_{min}=$

אנו מחפשים את ערכי הקיצון של $f_{(x,y)}=x^2+y^2$ תחת האילוץ $g_{(x,y)}=(x-y)^2+\frac{1}{2}(x+y)^2-1=0$.

נחפש את ערכיהם של x ו- y אשר מקיימים את משוואת הגרדיינט $\vec{\nabla}f=\lambda\vec{\nabla}g$ ואת המשוואה $g_{(x,y)}=0$.

פתרון משוואת הגרדיינט:

$$\vec{\nabla}f=\lambda\vec{\nabla}g \quad => \quad 2x\hat{x}+2y\hat{y}=\lambda\{[2(x-y)+x+y]\hat{x}+[2(y-x)+x+y]\hat{y}\}$$

$$2x\hat{x}+2y\hat{y}=\lambda[(3x-y)\hat{x}+(3y-x)\hat{y}]$$

$$\begin{cases}2x=\lambda(3x-y)\\2y=\lambda(3y-x)\end{cases} \quad => \quad \frac{x}{y}=\frac{3x-y}{3y-x} \quad => \quad 3xy-x^2=3xy-y^2 \quad => \quad y=\pm x$$

<u>הערה</u>: חילקתי המשוואות זו בזו כי כאן $\lambda=0$ גורר $(x,y)=(0,0)$, ואנו יודעים ש- $(0,0)$ אינה על האליפסה.
הספר אינו נוהג לעשות זאת למרות שזה מקצר את החישוב, מטעמי זהירות כנראה.

נציב אם כן $y=\pm x$ במשוואה $g_{(x,y)}=0$:

$$(x-y)^2+\frac{1}{2}(x+y)^2=1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases}y=x \quad => \quad 2x^2=1 \quad => \quad x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\lambda=1)\\ y=-x \quad => \quad 4x^2=1 \quad => \quad x=\pm\frac{1}{2} \quad (\lambda=\frac{1}{2})\end{cases}$$

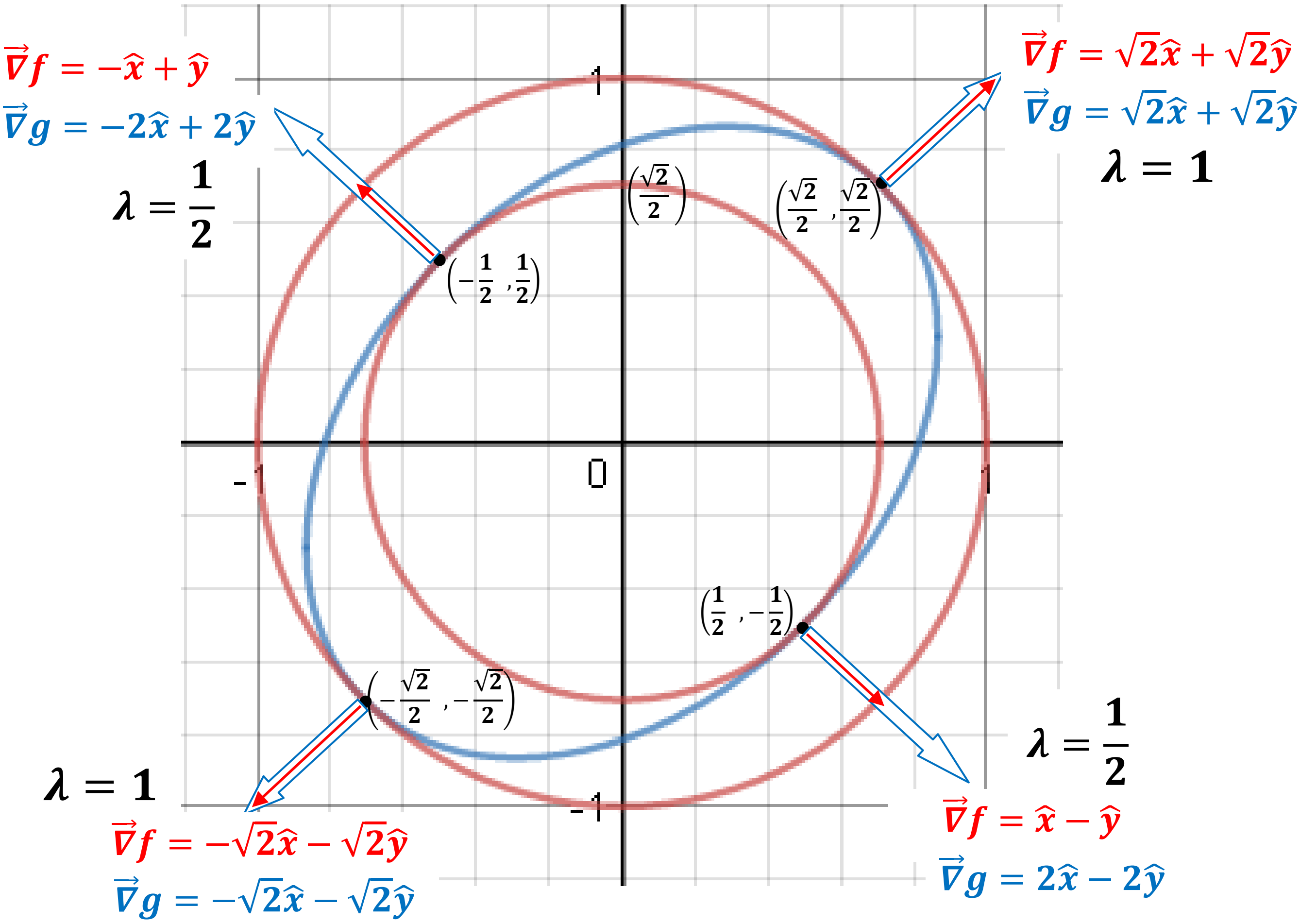
למציאת ערכי הקיצון שמקבלת $f_{(x,y)}=x^2+y^2$ על האליפסה $(x-y)^2+\frac{1}{2}(x+y)^2=1$ יש לבדוק ארבע נק' :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad , \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad , \quad \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \quad , \quad \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

נציבן בפונקציה $f_{(x,y)}=x^2+y^2$, כול נקודה בתורה:

$$f_{(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})}=1 \quad , \quad f_{(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})}=1 \quad , \quad f_{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}=\frac{1}{2} \quad , \quad f_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=\frac{1}{2}$$

וכעת לפיתרון במבט גיאומטרי: קווי הרמה של f הם מעגלים קנוניים – "מעגלי רמה" $x^2+y^2=c$.
c הוא ערכה של f מעל מעגל רמה, ושווה לריבוע רדיוסו. f גדולה יותר מתאימה למעגל רמה גדול יותר, ולהפך.
רדיוסו של מעגל הרמה הקטן ביותר שנוגע באליפסה הוא $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ולכן ערכה של f מעליו הוא $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$
רדיוסו של מעגל הרמה הגדול ביותר שנוגע באליפסה הוא 1 ולכן ערכה של f מעליו הוא $1^2=1$



$$\vec{\nabla} f_{(x,y)} = 2x\hat{x} + 2y\hat{y} \quad => \quad \vec{\nabla} f_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{2}\hat{x} + \sqrt{2}\hat{y}$$

$$\vec{\nabla} g_{(x,y)} = (3x - y)\hat{x} + (3y - x)\hat{y} \quad => \quad \vec{\nabla} g_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{2}\hat{x} + \sqrt{2}\hat{y}$$

$$\vec{\nabla} f_{(x,y)} = 2x\hat{x} + 2y\hat{y} \quad => \quad \vec{\nabla} f_{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -\sqrt{2}\hat{x} - \sqrt{2}\hat{y}$$

$$\vec{\nabla} g_{(x,y)} = (3x - y)\hat{x} + (3y - x)\hat{y} \quad => \quad \vec{\nabla} g_{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -\sqrt{2}\hat{x} - \sqrt{2}\hat{y}$$

$$\vec{\nabla} f_{(x,y)} = 2x\hat{x} + 2y\hat{y} \quad => \quad \vec{\nabla} f_{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = -\hat{x} + \hat{y}$$

$$\vec{\nabla} g_{(x,y)} = (3x - y)\hat{x} + (3y - x)\hat{y} \quad => \quad \vec{\nabla} g_{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = -2\hat{x} + 2\hat{y}$$

$$\vec{\nabla} f_{(x,y)} = 2x\hat{x} + 2y\hat{y} \quad => \quad \vec{\nabla} f_{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)} = \hat{x} - \hat{y}$$

$$\vec{\nabla} g_{(x,y)} = (3x - y)\hat{x} + (3y - x)\hat{y} \quad => \quad \vec{\nabla} g_{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)} = 2\hat{x} - 2\hat{y}$$