מצא את $I = \iint_R (\sin x + y^3 + 3)\, dA$ כאשר R מוגדר ע"י $x^2 + y^2 \le 1$.

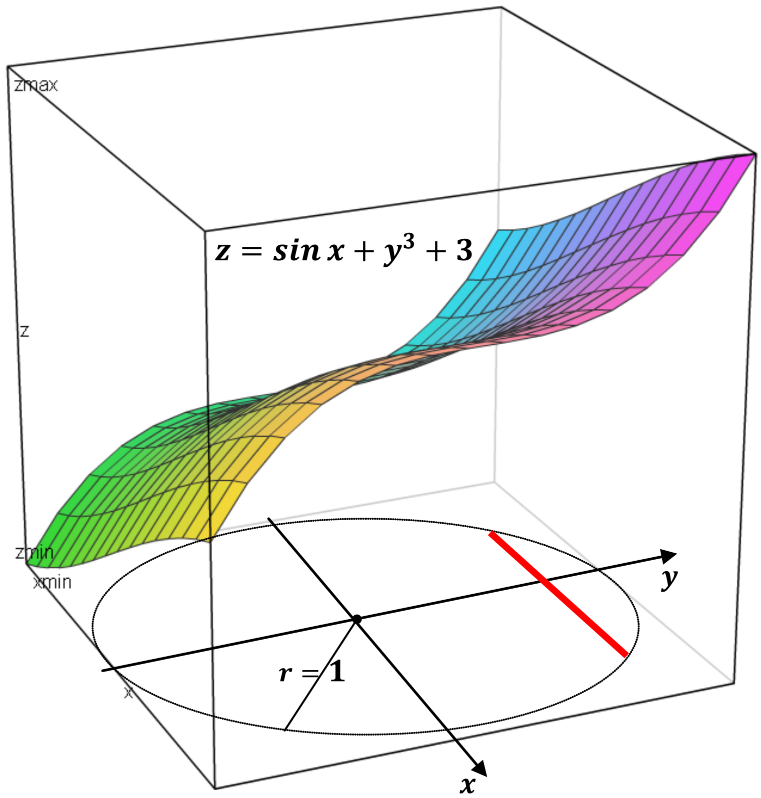
$z = \sin x$ היא פונקציה אי זוגית ולכן חל קיזוז נפח כשנעים שמאלה/ימינה מהנקודה $(0,0,3)$ במקביל למישור xz .

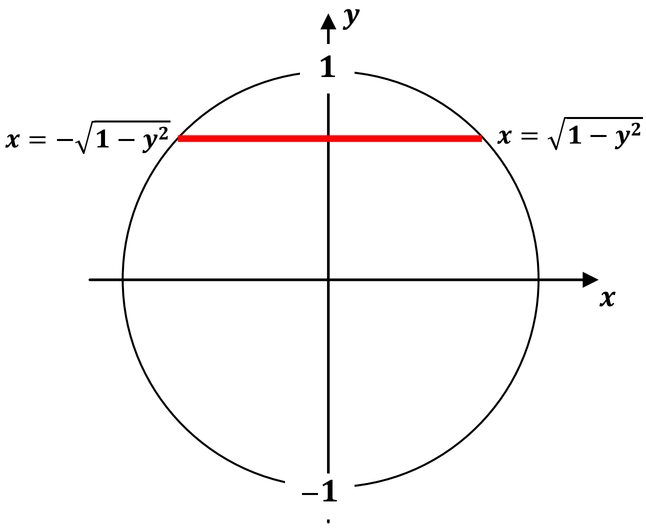
$z = y^3$ אף היא פונקציה אי זוגית, לכן חל קיזוז נפח כשנעים שמאלה/ימינה מהנקודה $(0,0,3)$ במקביל למישור yz .

אפשר אם כך להחליף את משטח הפונקציה הנתון במשטח אופקי $z = 3$, ויתקבל הנפח המבוקש.

במצב זה אפילו אינטגרציה אינה נחוצה, כי מדובר למעשה בגליל שנפחו $V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 1^2 \cdot 3 = 3\pi$.

למרות זאת נלך גם בדרך הארוכה, כי לא לעיתים קרובות מקבלים מתנות כאלה...





$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (\sin x + y^3 + 3)dxdy = \int_{-1}^{1}\left[-\cos x + xy^3 + 3x\right|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy =$$

$$\int_{-1}^{1}\left[-\cos\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-y^2}\cdot y^3 + 3\sqrt{1-y^2} - \left(-\cos\sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-y^2}\cdot y^3 - 3\sqrt{1-y^2}\right)\right] dy =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(2\sqrt{1-y^2}\cdot y^3 + 6\sqrt{1-y^2}\right)dy = 2\int_{-1}^{1}\left(y^3\sqrt{1-y^2} + 3\sqrt{1-y^2}\right)dy =$$

$$\begin{cases} y = \sin t & , \quad y = -1 \rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \quad , \quad y = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ dy = \cos t \cdot dt \end{cases}$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 t \cdot \cos t + 3\cos t\right)\cos t \cdot dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 t + 3\right)(\cos^2 t)dt =$$

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(sin^3t+3)\,(1-sin^2t)dt \;=\; 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(sin^3t-sin^5t+3-3sin^2t\right)dt \;=\; , \quad sin^2\alpha=\frac{1-cos2\alpha}{2}$$

$$=\;-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(sin^5t-sin^3t+3sin^2t-3\right)dt \;=\; -2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(sin^4t\cdot sint-sin^2t\cdot sint+3\frac{1-cos2t}{2}-3\right)dt \;=$$

$$=\;-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(1-cos^2t\right)^2\cdot sint-\left(1-cos^2t\right)sint+3\frac{1-cos2t}{2}-3\right)dt \;=$$

$$=\;-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(1-2cos^2t+cos^4t\right)\cdot sint-sint+cos^2t\cdot sint+3\frac{1-cos2t}{2}-3\right)dt \;=$$

$$=\;-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(sint-2cos^2t\cdot sint+cos^4t\cdot sint-sint+cos^2t\cdot sint+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}cos2t-3\right)dt \;=$$

$$=\;-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(cos^4t\cdot sint-cos^2t\cdot sint-\frac{3}{2}cos2t-\frac{3}{2}\right)dt \;=$$

$$=\;2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}cos^4t\cdot(-sint)\,dt \;-\; 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}cos^2t\cdot(-sint)\,dt \;+\; 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}cos2t\,dt+3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dt \;=$$

$$\begin{cases} u=cost \\ du=-sint\cdot dt \end{cases} \quad , \quad t=-\frac{\pi}{2}\;\rightarrow\;u=0 \quad , \quad t=\frac{\pi}{2}\;\rightarrow\;u=0$$

$$=\;2\int_0^0 u^4du \;-\; 2\int_0^0 u^2du \;+\; 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}cos2t\,dt \;+\; 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dt \;=\; 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}cos2t\,dt \;+\; 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dt \;=$$

$$=\;3\frac{sin2t}{2}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \;+\; 3t\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \;=\; \frac{3}{2}\left(sin\pi-sin(-\pi)\right) \;+\; 3\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \;=\; 3\pi$$