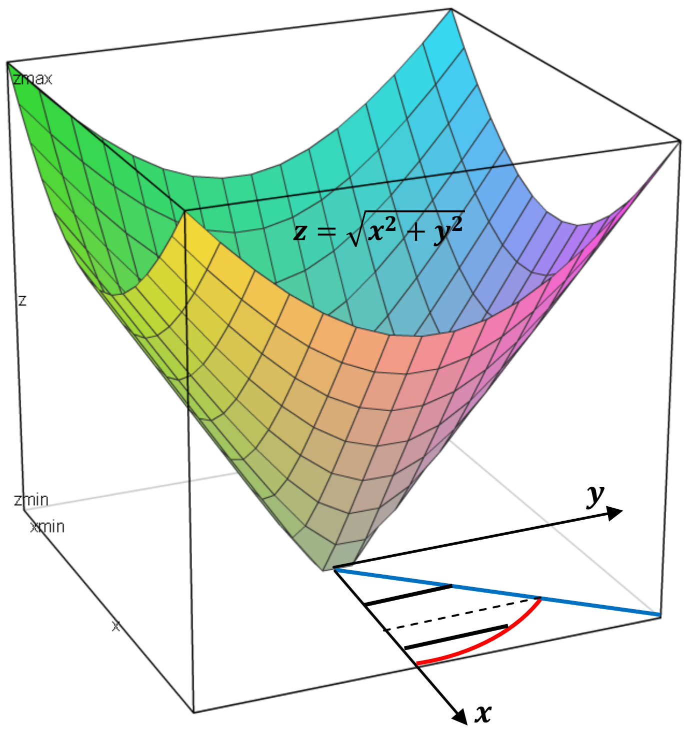
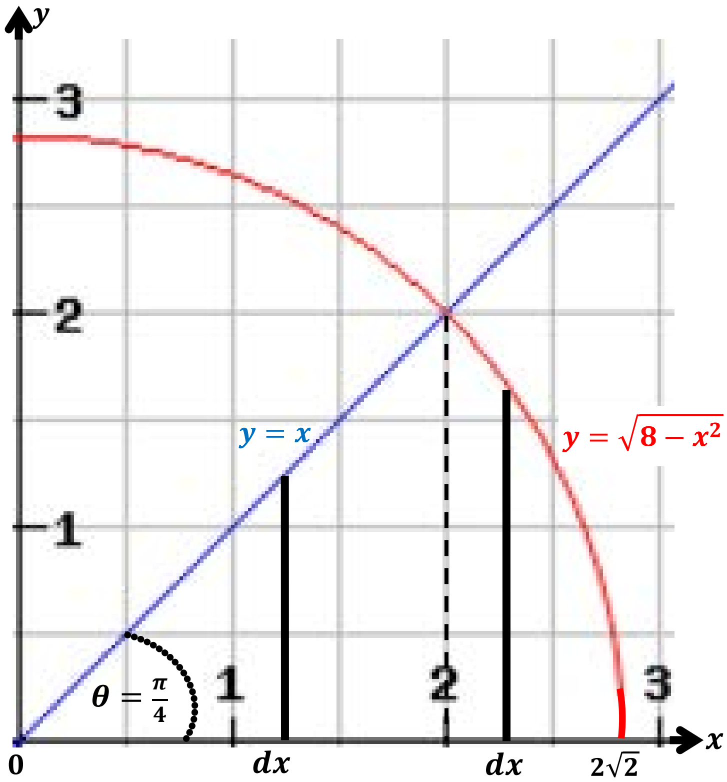
חשב את: $\int_0^2 dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dy + \int_2^{2\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy$.

בכתיב אחר: $\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dydx \; + \; \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dydx$





האיור עוזר לנו להבין כי המשימה היא בעצם חישוב הנפח הכלוא בין גזרת שמינית המעגל לבין משטח הפונקציה.

הוא גם מראה לנו כי אין צורך לפצל את תחום האינטגרציה אם מחליפים את סדר האינטגרציה ("קירות שוכבים").

הבחירה בקואורדינאטות פולאריות מניבה הן אינטגרציה אחת במקום שתיים, והן אינטגרל קל יותר לחישוב:

$$\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dydx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dydx = \int_0^2 \int_y^{\sqrt{8-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\sqrt{2}} r \cdot r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\sqrt{2}} r^2 \cdot dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^3}{3} \Bigg|_0^{2\sqrt{2}} d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(16\sqrt{2} - 0\right) d\theta =$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{3} \theta \Big|_0^{\pi/4} = \frac{16\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$$