מקסימום ומינימום מוחלטים באזורים סגורים ומתוחמים.

את החיפוש אחר ערכי קיצון **מוחלטים** של פונקציה רציפה $f_{(x,y)}$ באזור סגור ומתוחם **R**, אנו מחלקים לשלושה שלבים:

1) חישוב ערך הפונקציה בנקודות הקריטיות שלה – הנקודות **הפנימיות** שבהן מתאפסות נגזרותיה החלקיות הראשונות.
2) חישוב ערכי הפונקציה בנקודות **הגבול** של R אשר בהן היא מקבלת ערכי קיצון מקומיים (יודגם מיד).
3) בחירתם של הגבוה ביותר והנמוך ביותר מבין כל הערכים שחושבו לעיל. אלה הם ערכי המקסימום והמינימום **המוחלטים** של f ב- **R**.

שאלה מתרגיל מקוון – מציאת עומקו המרבי של אגם.

מצא את המקסימום המוחלט של

$$D_{(x,y)} = \frac{1}{20}x^2y + 1$$

באזור המשולש ברביע I אשר תחום ע"י הישרים

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad x + y = 10$$

פיתרון: מאחר ש- D גזירה, הערך המבוקש יכול להתקבל רק בנקודות שבתוך המשולש אשר בהן $f_x = 0$ ו- $f_y = 0$, או בנקודות שעל הגבול.

א) נחפש **נקודות פנימיות** שעבורן יש לנו

$$f_x = \frac{1}{10}xy = 0 \quad , \quad f_y = \frac{1}{20}x^2 = 0$$

פתרון שתי המשוואות הוא $x = 0$, ז"א הצלע **OB** בציור.

יש לחפש אם כך רק נקודות שעל הגבול.

ב) נקודות גבול. נבחן כל צלע של המשולש בתורה:

על הצלע **OA** , $y = 0$, ולכן יכולה D להיחשב פונקציה של x בלבד, המוגדרת על האינטרוול הסגור $0 \le x \le 10$.

$$D_{(x,y)} = D_{(x,0)} = 1\text{ m}$$

על הצלע **OB** , $x = 0$, ולכן יכולה D להיחשב פונקציה של y בלבד, המוגדרת על האינטרוול הסגור $0 \le y \le 10$.

$$D_{(x,y)} = D_{(0,y)} = 1\text{ m}$$

נקודות הקצה של הצלע **AB** נותחו כבר קודם, כך שנותר לבדוק רק נקודות פנימיות של מקטע זה.

עם $y = 10 - x$ יש לנו :

המשך התרגיל במסגרת שמשמאל ←

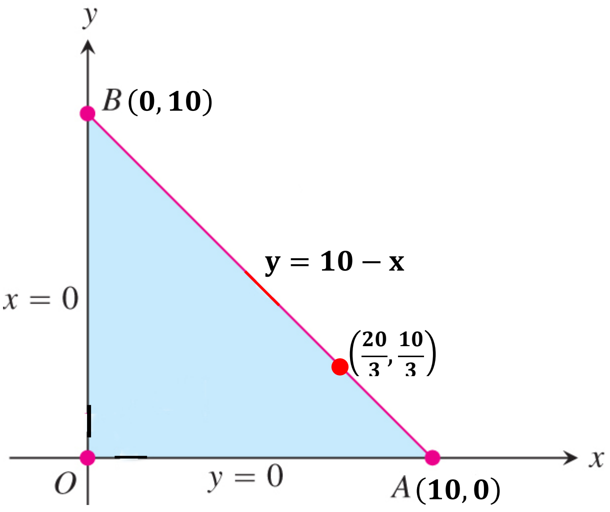
נתון אגם מלאכותי המוגבל ע"י הישרים

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad x + y = 10$$

עומקו של האגם במטרים נתון ע"י

$$D_{(x,y)} = \frac{1}{20}x^2y + 1$$

מהו עומקו המרבי ?



$$D_{(x,\ 10-x)} = \frac{1}{20}x^2(10-x) + 1 \quad =>$$

$$D_{(x,\ 10-x)} = -\frac{1}{20}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$$

איפוס הנגזרת הראשונה מניב

$$D'_{(x,\ 10-x)} = -\frac{3}{20}x^2 + x = 0 => 3x^2 - 20x = 0$$

$$=> \quad x(3x - 20) = 0 \quad => \quad x = 20/3$$

$$y = 10 - x = 10 - 20/3 = 10/3$$

$$D_{(20/3,\ 10/3)} = \frac{227}{27} \approx 8.41\text{ m}$$

לסיכום, עומקו המרבי של האגם הינו $\frac{227}{27}$ מטרים.