1. טור אינסופי

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ מתכנס? (10 נק') אם כן חשב את ערכו (15 נק').

פיתרון:

המכנה של האיבר הכללי הינו טור חשבוני שאת ערכו ניתן לחשב על פי הנוסחה לטור חשבוני:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} \quad = \quad \frac{n(1+n)}{2} \quad = \quad \frac{n^2+n}{2}}$$

הטור הנתון יכול להיכתב אם כך באופן הבא:

$$\sum\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+2+3+\cdots+}\boldsymbol{n}} \quad = \quad \sum\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n^2+n}} \quad = \quad \mathbf{2}\sum\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n^2+n}} \quad => \quad converges$$

טור זה מתכנס כי הטור $\sum\frac{1}{n^2}$ שהינו טור *p* מתכנס (*p=2*) מהווה לו גג.

ניגש כעת לחישוב ערכו:

$$\boldsymbol{\frac{1}{n(n+1)} \quad = \quad \frac{A}{n}+\frac{B}{n+1} \quad = \quad \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} \quad = \quad \frac{(A+B)n+A}{n(n+1)} \quad => \quad A=1 \;,\; B=-1}$$

$$\boldsymbol{\sum_{1}^{n}\frac{1}{n^2+n} \quad = \quad \sum_{1}^{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \quad = \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \quad = \quad 1-\frac{1}{n+1}}$$

$$\boldsymbol{\sum\frac{1}{n^2+n} \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \quad = \quad 1}$$

$$\boldsymbol{2\sum\frac{1}{n^2+n} \quad = \quad 2}$$

2. גרדיאנט

חלקיק נע במישור *xy* בכיוון בו גדלה הטמפרטורה בקצב מרבי.

הטמפרטורה בכל נקודה נתונה על ידי הביטוי $T(x,y) = -e^{-2y}cosx$.

א. מצא את גרדיאנט הטמפרטורה של מסלול החלקיק (5 נק').

ב. מצא את משוואת מסלולו של החלקיק, $y = f_{(x)}$, אם נתון שהנקודה $P\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ נמצאת עליו (20 נק').

פיתרון א':

$$\vec{\nabla}T_{(x_0,y_0)} = e^{-2y}sinx\hat{x} + 2e^{-2y}cosx\hat{y}$$

פיתרון ב':

החלקיק נע בכיוון הגרדיאנט, משמע הגרדיאנט משיק למסלול.

הגרדיאנט בכל נקודה (x_0, y_0) משיק למסלול, ומתאר לכן את שיפוע (נגזרת) גרף המסלול בנקודה:

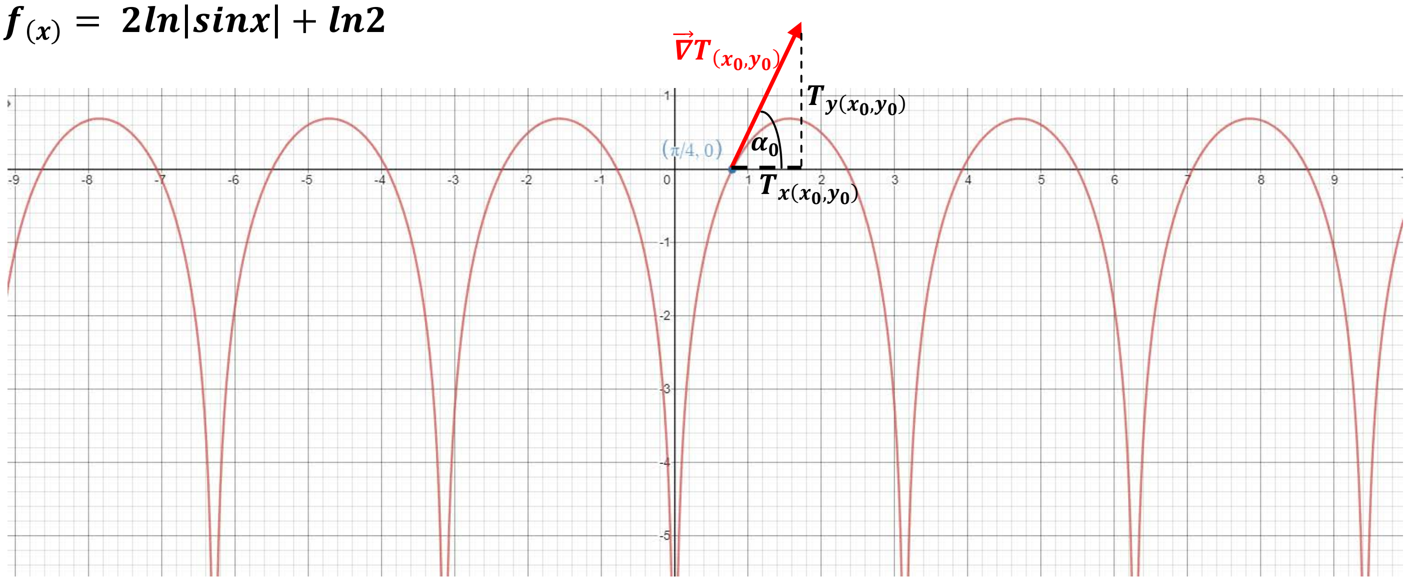
$$\vec{\nabla}T_{(x_0,y_0)} = T_{x(x_0,y_0)}\hat{x} + T_{y(x_0,y_0)}\hat{y} \quad => \quad tan\,\alpha_0 = \frac{T_{y(x_0,y_0)}}{T_{x(x_0,y_0)}} = f'_{(x_0)}$$

$$\vec{\nabla}T_{(x,y)} = e^{-2y}sinx\hat{x} + 2e^{-2y}cosx\hat{y} \quad => \quad tan\,\alpha = \frac{2e^{-2y}cosx}{e^{-2y}sinx} = 2\cot x = f'_{(x)}$$

$$f_{(x)} = \int f'_{(x)}dx + C = 2\int \cot x\,dx + C = 2\int\frac{cosx}{sinx}dx + C = 2ln|sinx| + C$$

$$f_{\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 0 \quad (given) \quad => \quad 0 = 2ln\left|sin\frac{\pi}{4}\right| + C \quad => \quad C = -2ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = ln2$$

$$f_{(x)} = 2ln|sinx| + ln2$$



3. <u>שיטת מינימום הריבועים</u>

מצא את הקו הישר הטוב ביותר שניתן להעביר בין הנקודות (0,1), (1,3), (2,2), (3,4), (4,5). יש לדייק עד ספרה אחת אחר הנקודה. תוצאה לא מדויקת לא תזכה בניקוד.

<u>פיתרון:</u>

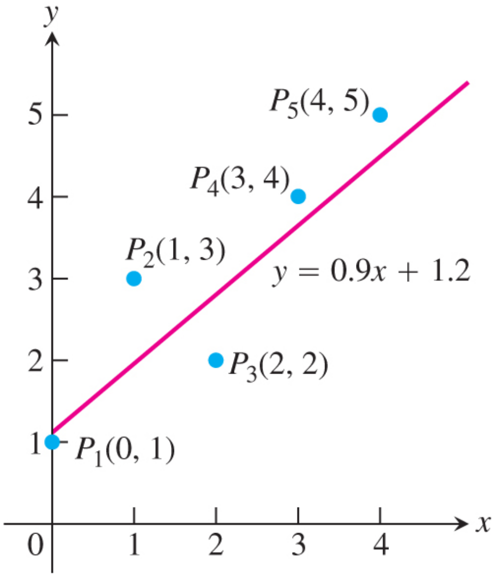
הנוסחאות ל- m ו- b יכולות להיכתב כך:

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \quad , \quad b = \frac{\overline{x^2}\cdot\overline{y} - \overline{x}\cdot\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

$$\overline{x} = \frac{0+1+2+3+4}{5} = 2 \quad , \quad \overline{y} = \frac{1+3+2+4+5}{5} = 3$$

$$\overline{xy} = \frac{0\cdot1 + 1\cdot3 + 2\cdot2 + 3\cdot4 + 4\cdot5}{5} = \frac{39}{5} \quad , \quad \overline{x^2} = \frac{0^2+1^2+2^2+3^2+4^2}{5} = 6$$

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{39/5 - 2\cdot3}{6-2^2} = 0.9 \quad , \quad b = \frac{\overline{x^2}\cdot\overline{y} - \overline{x}\cdot\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{6\cdot3 - 2\cdot39/5}{6-2^2} = 1.2$$



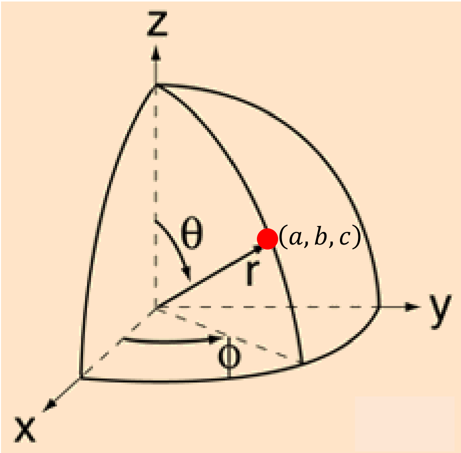
קו מינימום הריבועים הינו $y = 0.9x + 1.2$

4. <u>לגרנז'</u>

א. הראה כי הערך המכסימלי של $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$ על כדור שרדיוסו r ומרכזו בראשית מערכת הצירים הקרטזית במרחב של *a*, *b* ו- *c* הוא $(r^2/3)^3$ (15 נק').

ב. בהסתמך על סעיף א', הראה שעבור *a*, *b* ו- *c* שאינם שליליים מתקיים $\frac{a+b+c}{3} \geq (abc)^{1/3}$ כלומר, הממוצע הגיאומטרי של שלושה מספרים שווה או קטן מהממוצע החשבוני שלהם (10 נק').

<u>פיתרון:</u>



$$x^2+y^2+z^2=r^2 \quad => \quad g_{(x,y,z)}=x^2+y^2+z^2-r^2$$

$$f_{(x,y,z)}=x^2y^2z^2 \quad \rightarrow \quad max$$

אנו מחפשים את ערכה המרבי של $f_{(x,y,z)}=x^2y^2z^2$ תחת האילוץ

$$g_{(x,y,z)}=x^2+y^2+z^2-r^2=0$$

פתרון משוואת הגרדיינט:

$$\vec{\nabla} f=\lambda \vec{\nabla} g \quad => \quad (2xy^2z^2)\hat{x}+(2yx^2z^2)\hat{y}+(2zx^2y^2)\hat{z} \; = \; \lambda(2x\hat{x}+2y\hat{y}+2z\hat{z})$$

$$\begin{cases}2xy^2z^2=2\lambda x\\2yx^2z^2=2\lambda y\\2zx^2y^2=2\lambda z\end{cases}$$

$$\begin{cases}2xy^2z^2=2\lambda x\\2yx^2z^2=2\lambda y\end{cases} \quad => \quad \frac{y}{x}=\frac{x}{y} \quad => \quad y^2=x^2$$

$$\begin{cases}2xy^2z^2=2\lambda x\\2zx^2y^2=2\lambda z\end{cases} \quad => \quad \frac{z}{x}=\frac{x}{z} \quad => \quad z^2=x^2$$

הערה: חילקתי המשוואות זו בזו כי כאן $\lambda=0$ משמעו שלפחות אחד המשתנים שווה 0 ואז $f_{(x)}$ מינימאלית.

נציב $y^2=x^2$ ו- $z^2=x^2$ במשוואת האילוץ:

$$g_{(x,y,z)}=0 \quad => \quad x^2+y^2+z^2=r^2 \quad => \quad 3x^2=r^2 \quad => \quad x^2=\frac{r^2}{3}$$

כעת נציב $x^2=y^2=z^2=\frac{r^2}{3}$ ב- $f_{(x,y,z)}=x^2y^2z^2$

$$f_{max}=\frac{r^2}{3}\cdot\frac{r^2}{3}\cdot\frac{r^2}{3}=\left(\frac{r^2}{3}\right)^3$$

ובכן, בנקודות על פני הכדור אשר שיעוריהן שווים זה לזה בגודלם (ישנן שמונה כאלה), מקבלת מכפלת ריבועי השיעורים ערך מרבי שהינו $\left(\frac{r^2}{3}\right)^3$. באיור שלעיל, משמעות הדבר היא $\phi=45°$ ו- $\theta=54.736°$.

ב. בהסתמך על סעיף א', הראה שעבור a, b ו- c שאינם שליליים מתקיים $(abc)^{1/3} \leq \frac{a+b+c}{3}$ כלומר, הממוצע הגיאומטרי של שלושה מספרים אינו עולה על הממוצע החשבוני שלהם (10 נק').

פיתרון:

$$\boldsymbol{x^2y^2z^2 \leq \left(\frac{r^2}{3}\right)^3 \quad => \quad x^2y^2z^2 \leq \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3 \quad => \quad (x^2y^2z^2)^{1/3} \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

נשתמש כעת בתיווך $\boldsymbol{x^2 = a \ , \ y^2 = b \ , \ z^2 = c}$

$$\boldsymbol{(abc)^{1/3} \leq \frac{a+b+c}{3}}$$

5. <u>אינטגרל כפול</u>

עליך לחשב את $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$. רמז: השתמש בקשר $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy}dy$ כדי ליצור אינטגרל כפול.

חשב אותו בעזרת שינוי סדר האינטגרציה.

<u>פיתרון:</u>

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx = \int_0^\infty \int_a^b e^{-xy}\,dy\,dx = \int_a^b \int_0^\infty e^{-xy}\,dx\,dy$$

$$\int_0^\infty e^{-xy}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-xy}\,dx = -\frac{1}{y}\lim_{c\to\infty}\left[e^{-xy}\right|_0^c = -\frac{1}{y}\lim_{c\to\infty}\left(e^{-cy}-1\right) = \frac{1}{y}$$

$$\int_a^b \int_0^\infty e^{-xy}\,dx\,dy = \int_a^b \frac{1}{y}dy = lny\Big|_a^b = lnb - lna = ln\frac{b}{a}$$