1. <u>הטור האינסופי:</u> $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

א. הוכח בעזרת מבחן האינטגרל כי הטור מתכנס לערך קטן מ-2. צייר את הגרף המתאים והסבר (12 נק')

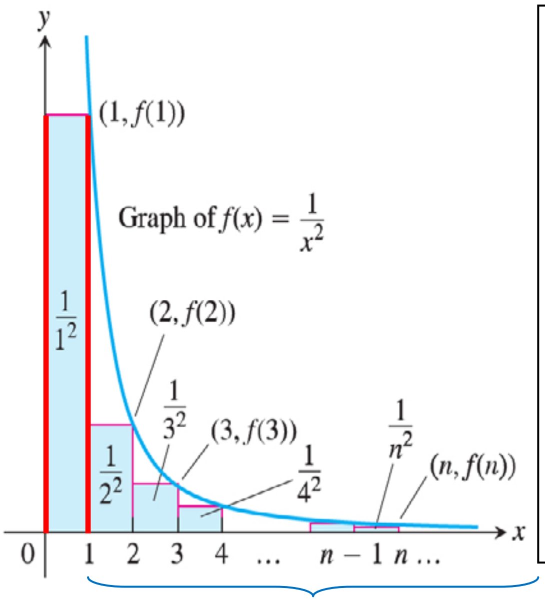
פיתרון א'

<u>מבחן האינטגרל - מתוך הספר קלקולוס</u>

נתוודע למבחן האינטגרל באמצעות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, שהינו "קרוב משפחה" של הטור ההרמוני.

האם טור זה מתכנס?

אנו קובעים זאת באמצעות השוואתו ל- $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$. אנו חושבים על אברי הטור כערכים של הפונקציה $f_{(x)}=\frac{1}{x^2}$, ומפרשים ערכים אלה כשטחים של מלבנים תחת גרף הפונקציה.



קל לראות באיור כי סכום שטחיהם של n מלבנים תחת גרף הפונקציה (ז"א הסכום החלקי ה- "n" של הטור), קטן מהשטח הכולל שמתחת לגרף.

$$= \text{סכום שטחי המלבנים} = S_n = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$= f_{(1)}+f_{(2)}+f_{(3)}+\cdots+f_{(n)} < f_{(1)}+\int_1^n\frac{1}{x^2}dx <$$

$$< 1+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = 1+1 = 2$$

אם כך, סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ חסומה מלעיל ע"י 2. לו היה זה החסם העליון **המינימאלי**, היה סכום הטור בידינו, אך אין זה כך. בנסיבות אלה ניתן רק לומר שסכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ קטן מ- 2.

בתחום זה השטח שמתחת לגרף הינו 1, ואם כך סכום שטחי המלבנים שבו (הטור <u>ללא איברו הראשון</u>) קטן מ- 1. שטח המלבן הראשון (האיבר הראשון של הטור) שווה 1, ואם כך סכום שטחי <u>כל המלבנים</u> (הטור כולו) קטן מ-2.

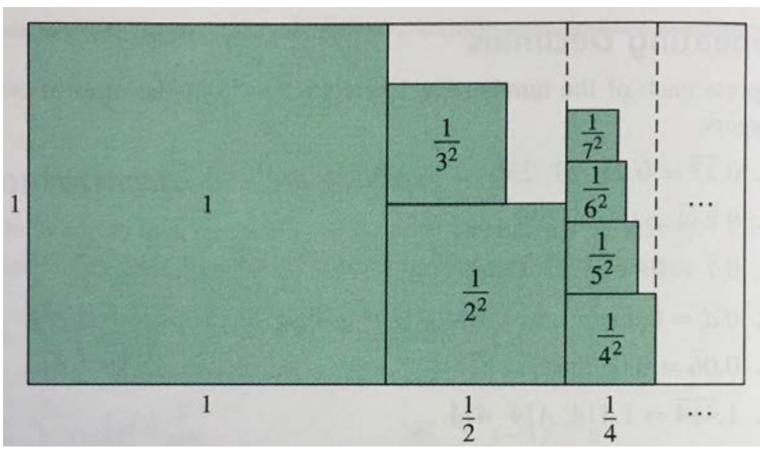
תיאורמה 9 : מבחן האינטגרל

תהי $\{a_n\}$ סדרה שאיבריה חיוביים.

נניח ש- $a_n = f_{(n)}$, כאשר $f_{(x)}$ היא פונקציה רציפה, חיובית ויורדת לכל $N \le x$.

אז אז, הטור $\sum_{n=N}^{\infty}a_n$ והאינטגרל $\int_N^{\infty}f_{(x)}\,dx$ מתכנסים שניהם או מתבדרים שניהם.

ב. הסבר בעזרת הציור המצורף מדוע הטור מתכנס לערך קטן מ-2 (13 נק')



גובהה של המסגרת המלבנית הוא 1.

רוחבה של המסגרת המלבנית הוא:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

שטח המסגרת המלבנית שווה למכפלת גובהה ברוחבה, ז"א ל- **2** .

שטחי הריבועים הפנימיים הם אברי הטור הנתון.

גובהו של כל "מגדל ריבועים" קטן משל קודמו, ולבטח קטן מאחד. המגדל אף הולך וצר כלפי מעלה.

אם כך, סכום שטחי הריבועים קטן משטח המסגרת.

2. דיפרנציאל שלם - רגישות לשינויים:

עליך לחשב את נפחו של צינור שאורכו כ- 1 ק"מ וקוטרו כ- 36 ס"מ. המדידות אינן מדויקות.

דיוקה של איזו מדידה קריטי יותר, זה של האורך או זה של הקוטר? <u>הסבר תוך שימוש בחישוב מתאים</u> (20 נק').

מהי רגישות הנפח לשינויים באורך הצינור? מהי רגישות הנפח לשינויים בקוטר הצינור? ציין יחידות (5 נק').

פיתרון:

נפח הצינור (גליל) : $V_{(r_0,l_0)} = \pi {r_0}^2 l_0$ $\qquad r_0 = 0.18m\ ,\ l_0 = 1000m$

כדי לאמוד את השינוי בנפח הצינור כתוצאה מסטייה במימדיו (אורך ורדיוס), נרשום את הקירוב הבא:

$$dV = V_{r(r_0\,,h_0)}\cdot dr + v_{l(r_0\,,h_0)}\cdot dl$$

$$V = \pi r^2 l \quad => \quad V_r = 2\pi r l \quad , \quad v_l = \pi r^2$$

$$dV = 2\pi r_0 l_0\cdot dr + \pi {r_0}^2\cdot dl = 2\pi(0.18)(1000)\cdot dr + \pi(0.18)^2\cdot dl$$

$$dV = 360\pi\cdot dr + 0.0324\pi\cdot dl$$

אם כך, רגישות הנפח לשינויים באורך הצינור היא $0.0324\pi\ [m^3/m]$

לעומת זאת, רגישות הנפח לשינויים בקוטר הצינור היא $180\pi\ [m^3/m]$.

בנסיבות הנתונות, רגיש נפח הצינור לשינויים קטנים בקוטרו פי 5,555 מישהו רגיש לשינויים קטנים באורכו.

3. כלל השרשרת:

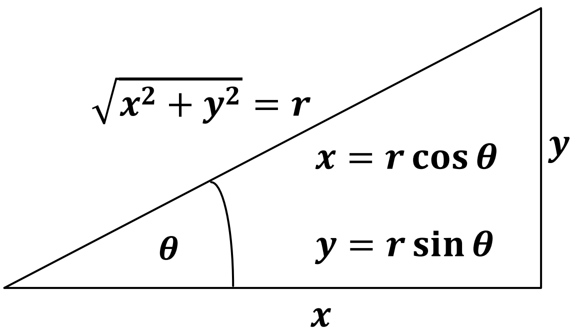
נתון כי $\omega = f(r,\theta)$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, וכן $\theta = arctan(y/x)$.

מצא את $\partial\omega/\partial x$ ו- $\partial\omega/\partial y$ במונחים של r ו-θ .

פיתרון:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial r}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial\omega}{\partial\theta}\cdot\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{\partial\omega}{\partial r}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial\omega}{\partial\theta}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial r}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial\omega}{\partial\theta}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{\partial\omega}{\partial r}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial\omega}{\partial\theta}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}$$

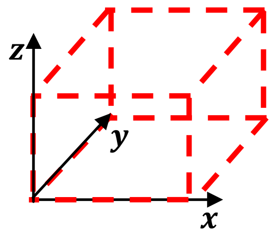


$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial r}\cdot\frac{r\cos\theta}{r} - \frac{\partial\omega}{\partial\theta}\cdot\frac{r\sin\theta}{r^2} = \omega_r\cdot\cos\theta - \omega_\theta\cdot\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial r}\cdot\frac{r\sin\theta}{r} + \frac{\partial\omega}{\partial\theta}\cdot\frac{r\cos\theta}{r^2} = \omega_r\cdot\sin\theta + \omega_\theta\cdot\frac{\cos\theta}{r}$$

4. לגרנז' או מבחן הנגזרות למציאת נקודות קיצון:

יש ליצר תיבה מלבנית שנפחה V סמ"ק. עלות חומרי הגלם, אשר בהם נעשה שימוש לבניית התיבה הם: a סנטים לסמ"ר בגין מכסה עליון ותחתון, b סנטים לסמ"ר בגין דופן קדמית ואחורית, ו-c סנטים לסמ"ר בגין השאר. מהן המידות הנדרשות כדי למזער את העלות הכוללת של התיבה?



<u>פיתרון</u> (לגרנז'):

אנו נדרשים למצוא את x , y , ו- z כך שעלות התיבה תהא מינימאלית.

זאת תחת האילוץ שנפחה יהא קבוע: $xyz = V \quad <= \quad g_{(x,y,z)} = xyz - V$.

הפונקציה אשר מייצגת את עלות התיבה היא: $f_{(x,y,z)} = 2(axy + bxz + cyz)$

נחפש את ערכיהם של x , y ו- z אשר מקיימים את משוואת הגרדיינט $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$ ואת המשוואה $g_{(x,y,z)} = 0$.

פתרון משוואת הגרדיינט:

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \quad => \quad 2[(ay+bz)\hat{x} + (ax+cz)\hat{y} + (bx+cy)\hat{z}] = \lambda(yz\hat{x} + xz\hat{y} + xy\hat{z})$$

$$\begin{cases} 2(ay+bz) = \lambda yz \\ 2(ax+cz) = \lambda xz \\ 2(bx+cy) = \lambda xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(ay+bz) = \lambda yz \\ 2(ax+cz) = \lambda xz \end{cases} \quad => \quad \frac{ay+bz}{ax+cz} = \frac{y}{x} \quad => \quad axy + bxz = axy + cyz \quad => \quad bx = cy$$

$$\begin{cases} 2(ay+bz) = \lambda yz \\ 2(bx+cy) = \lambda xy \end{cases} \quad => \quad \frac{ay+bz}{bx+cy} = \frac{z}{x} \quad => \quad axy + bxz = bxz + cyz \quad => \quad ax = cz$$

<u>הערה</u>: חילקתי המשוואות זו בזו כי כאן $\lambda = 0$ משמעו ערכים שליליים למי מהמשתנים/פרמטרים, ואנו יודעים שבשאלה זו הם בהכרח חיוביים, כי הם מייצגים ממדים ומחירים.

נציב כעת $y = \frac{b}{c}x$ ו- $z = \frac{a}{c}x$ במשוואה $g_{(x,y,z)} = 0$:

$$xyz = V \quad => \quad x \cdot \frac{b}{c}x \cdot \frac{a}{c}x = V \quad => \quad \frac{ab}{c^2}x^3 = V \quad => \quad x = \sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}V}$$

$$y = \frac{b}{c}x = \frac{b}{c} \cdot \sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}V} = \sqrt[3]{\frac{b^2}{ac}V}$$

$$z = \frac{a}{c}x = \frac{a}{c} \cdot \sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}V} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}V}$$

5. <u>אינטגרל כפול:</u>

נתון האינטגרל $\int_{0}^{asin\beta}\int_{y/tg\beta}^{\sqrt{a^2-y^2}} ln(x^2+y^2)dxdy$ כאשר $0<a$ ו- $0<\beta<\frac{\pi}{2}$

א. צייר את התחום R במישור xy (10 נק')

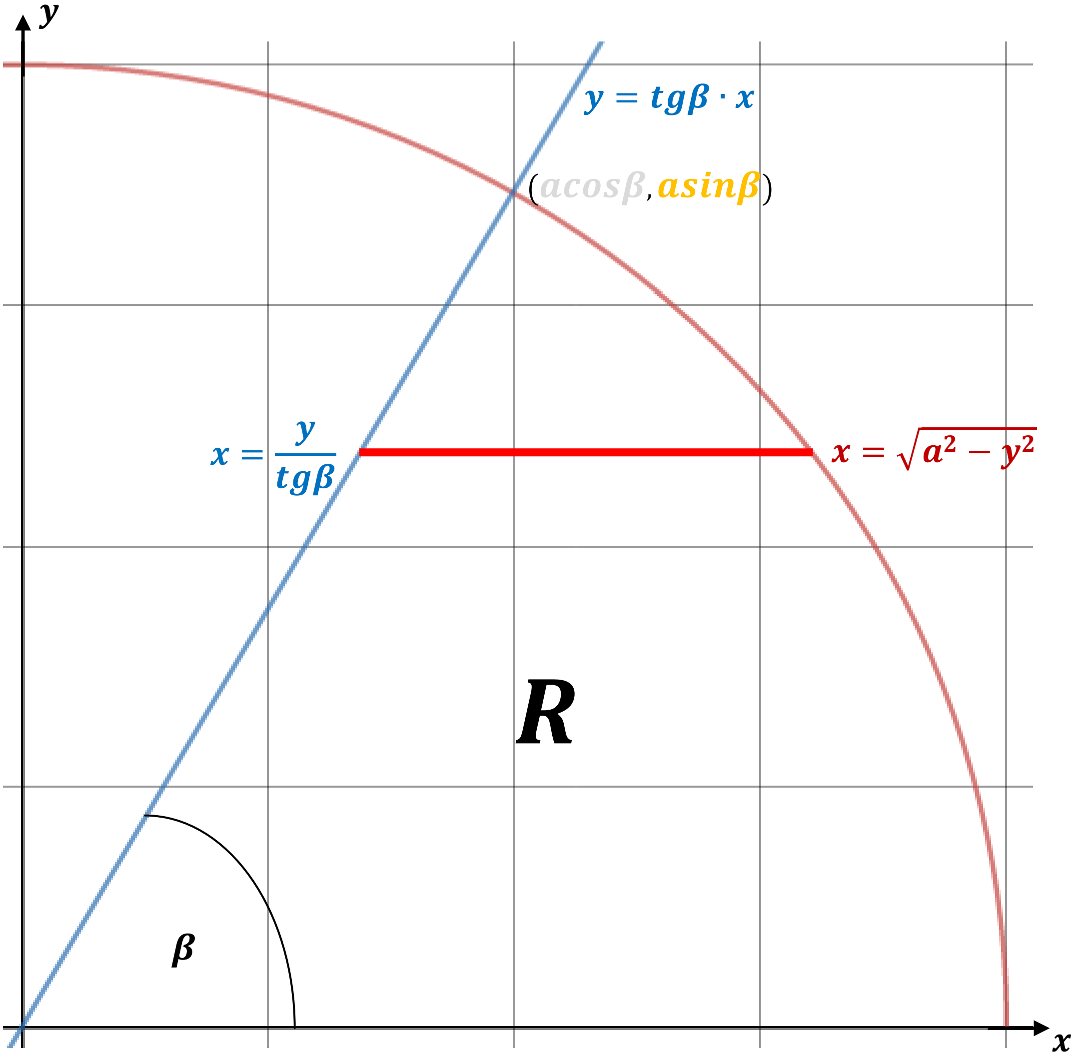
ב. רשום שוב את האינטגרל, הפעם כשסדר האינטגרציה הפוך (5 נק')

ג. עבור להצגה פולארית וחשב את האינטגרל (10 נק')

<u>פיתרון א'</u> - ציור התחום R במישור xy:

אינטגרציה ראשונה לפי dx ("קיר שוכב") $\frac{y}{tg\beta}\le x\le\sqrt{a^2-y^2}$.

אינטגרציה שנייה לפי dy (הצמדתם של "קירות שוכבים" זה לזה) $0\le y\le asin\beta$.



פיתרון ב' - רישום האינטגרל בסדר אינטגרציה הפוך (מתקבלים שני אינטגרלים):

אינטגרל ראשון:

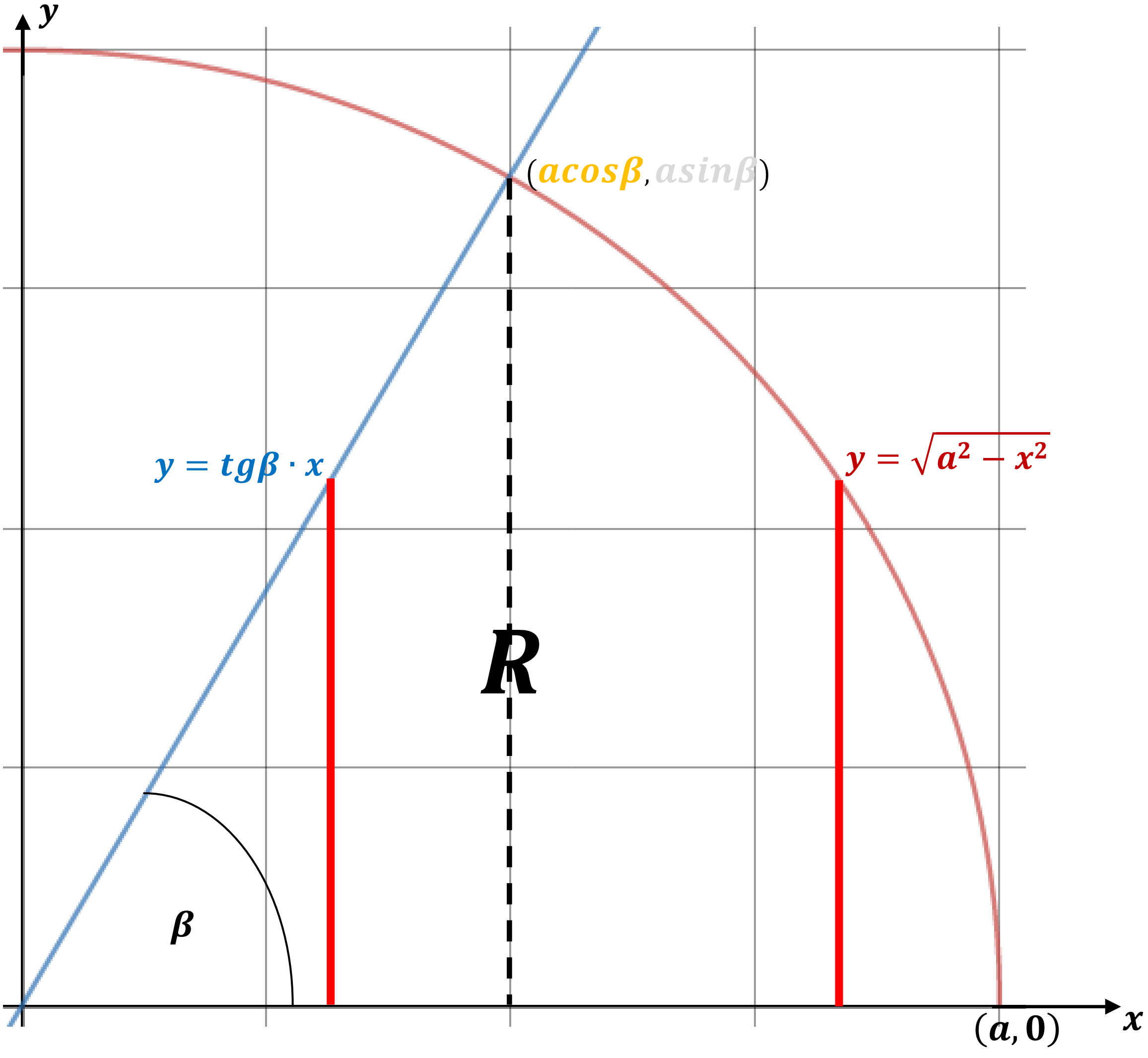
אינטגרציה ראשונה לפי dy ("קיר עומד") $0 \le y \le tg\beta \cdot x$.

אינטגרציה שנייה לפי dx (הצמדתם של "קירות עומדים" זה לזה) $0 \le x \le a\cos\beta$.

אינטגרל שני:

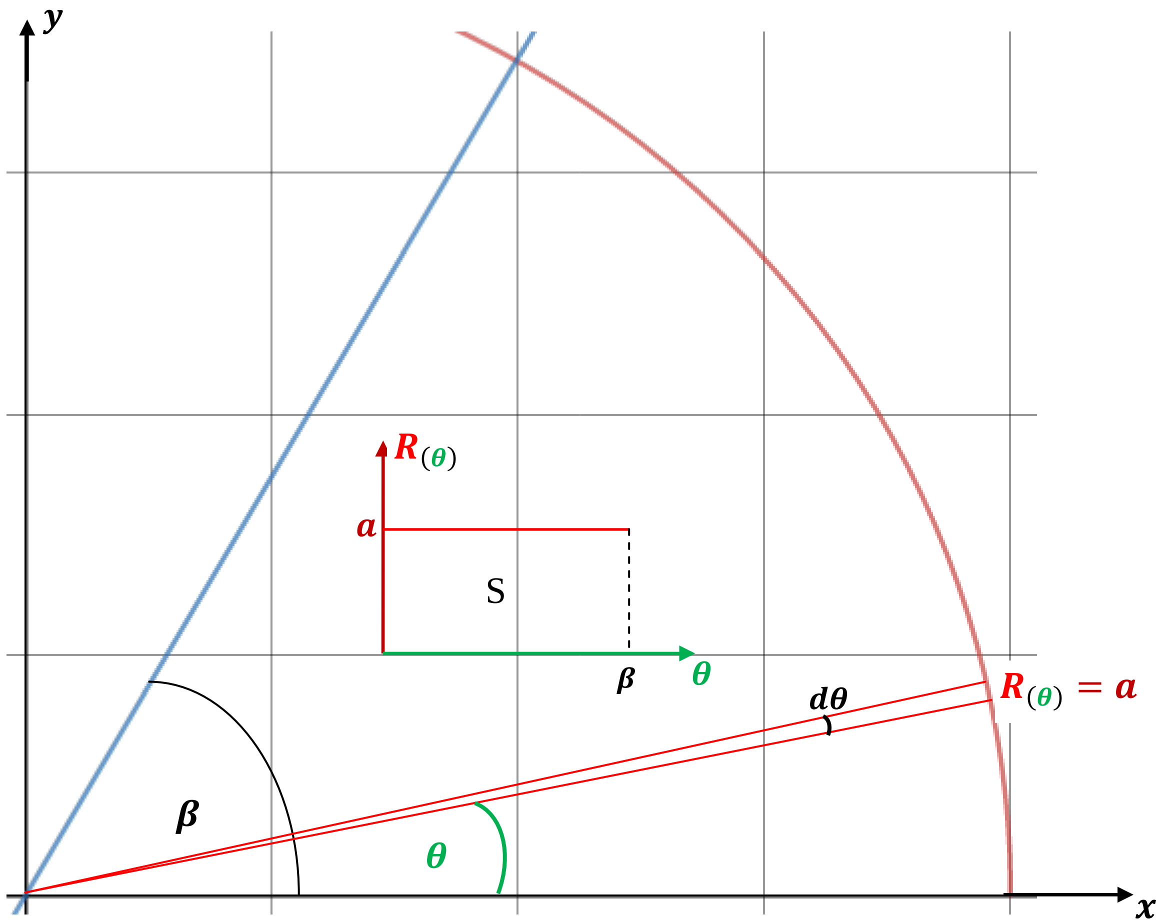
אינטגרציה ראשונה לפי dy ("קיר עומד") $0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}$.

אינטגרציה שנייה לפי dx (הצמדתם של "קירות עומדים" זה לזה) $a\cos\beta \le x \le a$.



$$\int_0^{a\cos\beta}\int_0^{tg\beta\cdot x} \ln(x^2+y^2)\,dydx + \int_{a\cos\beta}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \ln(x^2+y^2)\,dydx$$

פיתרון ג' - הצגה פולארית וחישוב האינטגרל:



$$\iint_R f_{(x,y)}\,dA \quad = \quad \int_0^\beta \int_0^a ln(r^2)\cdot r\cdot dr\cdot d\theta \quad = \quad \lim_{b\to 0^+}\int_0^\beta \int_b^a ln(r^2)\cdot r\cdot dr\cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to 0^+}\int_0^\beta \int_b^a ln(r^2)\cdot 2r\cdot dr\cdot d\theta \quad => \quad \begin{cases} u = r^2 \\ du = 2r\cdot dr \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to 0^+}\int_0^\beta \int_b^{a^2} ln(u)\cdot du\cdot d\theta \quad \to \quad \int ln(u)du \;=\; u\cdot ln(u) - u \quad (\text{מסמך א'})$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to 0^+}\int_0^\beta \left[u\cdot lnu - u\,\right|_b^{a^2}\cdot d\theta \;=\; \frac{1}{2}\lim_{b\to 0^+}\int_0^\beta [a^2\cdot ln(a^2) - a^2 - (b\cdot lnb - b)]\cdot d\theta \;=$$

$$\lim_{b\to 0^+}(b\cdot lnb - b) \;=\; \lim_{b\to 0^+}\left(\frac{lnb}{1/b} - b\right) \;=\; \frac{-\infty}{\infty} - 0 \;\overset{Lop}{\to}\; = \;\lim_{b\to 0^+}\left(\frac{1/b}{-1/b^2}\right) \;=\; -\lim_{b\to 0^+}(b) \;=\; 0$$

$$= \frac{a^2[ln(a^2) - 1]}{2}\int_0^\beta d\theta \quad = \quad \frac{a^2[ln(a^2) - 1]}{2}\left[\theta\,\right|_0^\beta \quad =$$

$$= \frac{a^2[ln(a^2) - 1]}{2}(\beta - 0) \quad = \quad \frac{\beta a^2[ln(a^2) - 1]}{2} \quad = \quad \beta a^2[ln(a) - 1/2]$$