1. אינטגרל לא אמיתי + טור אינסופי:

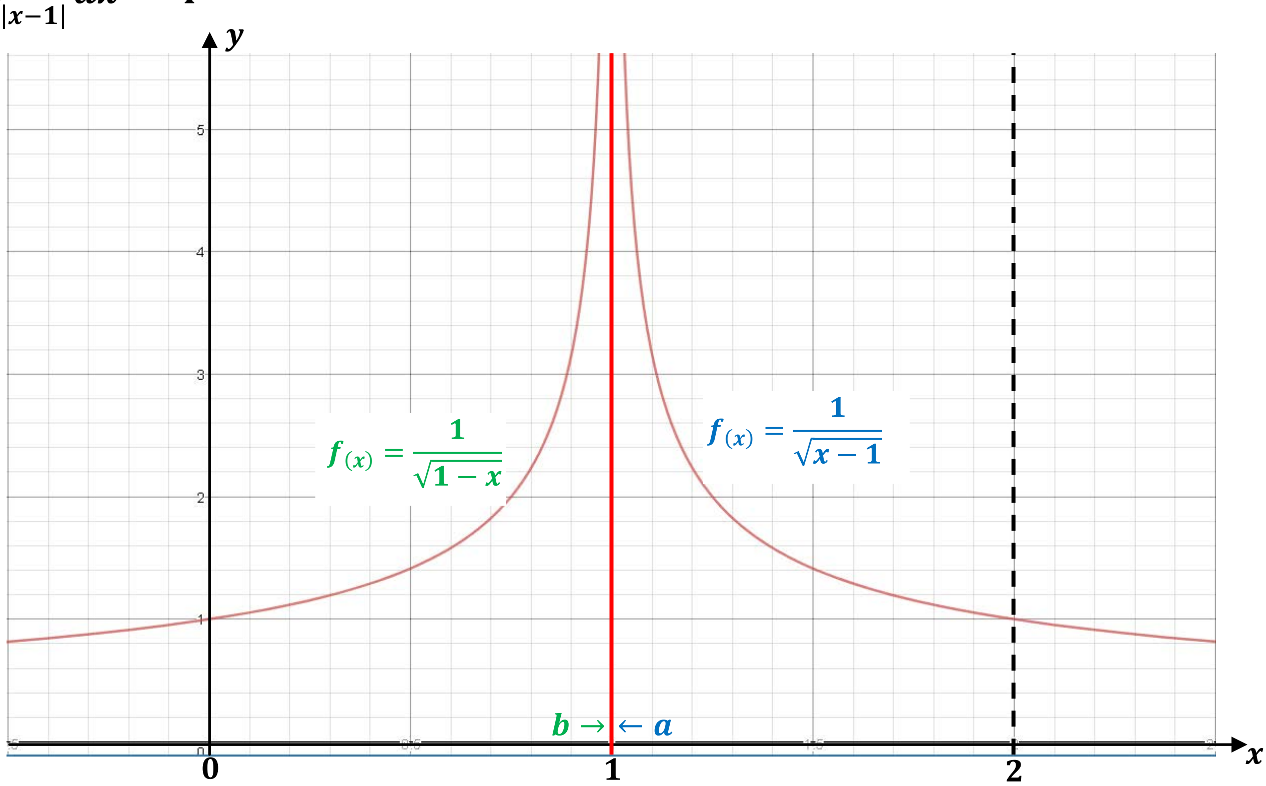
א. חשב את $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}dx$ (12 נק')

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}dx = \lim_{b\to1^-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx + \lim_{a\to1^+}\int_a^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$

$$\lim_{b\to1^-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = -2\lim_{b\to1^-}\sqrt{1-x}\Big|_0^b = -2\lim_{b\to1^-}\left(\sqrt{1-b}-1\right) = 2$$

$$\lim_{a\to1^+}\int_a^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = 2\lim_{a\to1^+}\sqrt{x-1}\Big|_a^2 = 2\lim_{a\to1^+}\left(1-\sqrt{a-1}\right) = 2$$

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}dx = 4$$



ב. האם $\frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{2}{n}-\frac{1}{n}+\cdots$ מתכנס? הסבר. (13 נק')

לא! הטור הנתון מתבדר. הסבר: נפצל את הטור הנתון לשני טורים

$$\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\cdots+\frac{2}{n}+\cdots = 2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\right) = 2S$$

$$-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\cdots-\frac{1}{n}+\cdots = -\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\right) = -S$$

נחברם זה לזה מחדש ונקבל טור הרמוני, שהינו <u>מתבדר</u> כידוע:

$$2S-S = S = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\right)$$

2. כלל השרשרת והדיפרנציאל השלם:

א. נתון כי $f_{(x,y)} = u_{(x+y\ ,x-y)}$. מצא את $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (15 נקוד')

פיתרון:

$$t = x + y \;=>\; \frac{\partial t}{\partial x} = 1\;,\; \frac{\partial t}{\partial y} = 1 \qquad , \qquad s = x - y \;=>\; \frac{\partial s}{\partial x} = 1\;,\; \frac{\partial s}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} = u_t + u_s$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(u_t+u_s) = \frac{\partial u_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial u_t}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial u_s}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial u_s}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} = u_{tt}+u_{ts}+u_{st}+u_{ss}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y} = u_t - u_s$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(u_t-u_s) = \frac{\partial u_t}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial u_t}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}-\left(\frac{\partial u_s}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial u_s}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}\right) = u_{tt}-u_{ts}-u_{st}+u_{ss}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = u_{tt}+\overset{same}{u_{ts}+u_{st}}+u_{ss}+u_{tt}-\overset{same}{u_{ts}-u_{st}}+u_{ss} = 2(u_{tt}+u_{ss})$$

ב. חשב את הערך של $ln\,(0.9997^2\cdot 1.0001^3)$ ללא מחשבון (10 נקוד').

$$ln(0.9997^2\cdot1.0001^3) = 2\,ln\,0.9997+3ln1.0001 \;=>\; \begin{cases} x_{new} = 0.9997 \;\rightarrow\; x_{old} = 1 \\ y_{new} = 1.0001 \;\rightarrow\; y_{old} = 1 \end{cases}$$

$$z_{(x,y)} = 2ln x + 3ln y \;=>\; \begin{cases} z_x = 2/x \;=>\; z_{x(1,1)} = 2/1 = 2 \\ z_y = 3/y \;=>\; z_{y(1,1)} = 3/1 = 3 \end{cases}$$

$$z_{old} = z_{(1,1)} = 2ln1+3ln1 = 0 \quad , \quad z_{new} = z_{(0.9997,1.0001)} = 2ln0.9997+3ln1.0001 = ?$$

$$\Delta z = z_{x(old)}\cdot\Delta x + z_{y(old)}\cdot\Delta y \quad , \quad \begin{cases} \Delta x = x_{new}-x_{old} = 0.9997-1 = -0.0003 \\ \Delta y = y_{new}-y_{old} = 1.0001-1 = 0.0001 \end{cases}$$

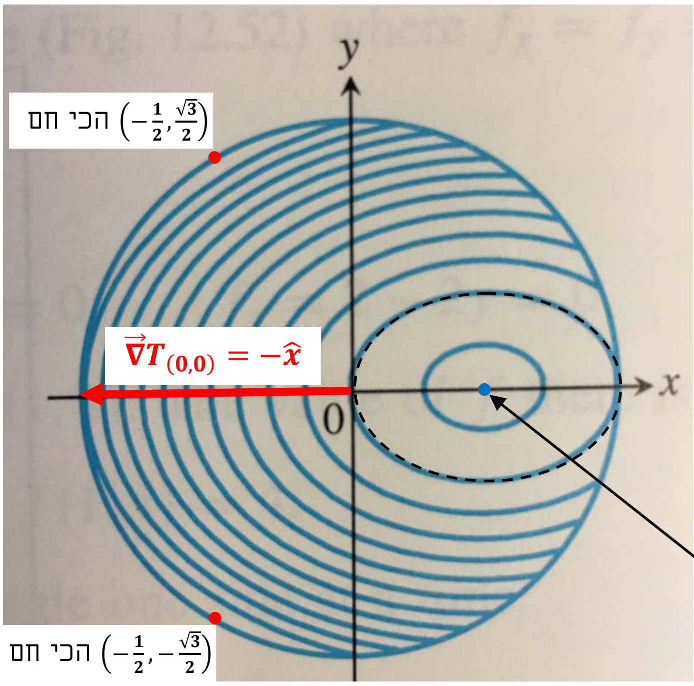
$$\Delta z = z_{x(1,1)}\cdot\Delta x + z_{y(1,1)}\cdot\Delta y = 2\cdot(-0.0003)+3\cdot0.0001 = -0.0003$$

$$z_{new} \approx z_{old}+\Delta z = 0+(-0.0003) = -3\cdot10^{-4}$$

ע"פ מחשבון: $z_{new} = -3.00105018\cdot10^{-4}$

3. נקודות קיצון:

הציור מתאר משטח מעגלי $x^2+y^2\le 1$. המשטח מחומם כך שפילוג הטמפרטורה על פניו נתון על ידי $T(x,y)=x^2+2y^2-x$. עקומות שוות טמפרטורה נקראות איזותרמות.



א. מצא את הנקודות החמות ביותר והקרות ביותר על המשטח (15 נק').

$$\begin{cases} T_x = 2x-1=0 \\ T_y = 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{1}{2},0\right) \ \textit{suspect}$$

$$T_x = 2x-1 \Rightarrow \begin{cases} T_{xx} = 2 \\ T_{xy} = 0 \end{cases}$$

$$T_y = 4y \Rightarrow T_{yy} = 4$$

$$\Delta = T_{xx}T_{yy} - {T_{xy}}^2 = 8>0\ ,\ T_{xx}>0 \Rightarrow$$

$\left(\frac{1}{2},0\right)$ *is a point of min Temp* $(-0.25\ deg.)$

לא נמצאה נקודת מקסימום "טבעית" על המשטח, אז נחפש את המקסימום על גבול התחום , ז"א על המעגל.
אפשר לעשות זאת בעזרת משוואת הגרדיינט של לגרנז', או בדרך ה"רגילה" שבה נלך כאן:

$$\begin{cases} T_{(x,y)} = x^2+2y^2-x \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow T_{\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)} = x^2+2(1-x^2)-x = -x^2-x+2$$

זוהי פרבולה "בוכה" כך שקודקודה הוא אכן מקסימום. מנוסחת ציר הסימטריה מתקבל $x_k=\frac{-b}{2a}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$.

$$y^2 = 1-x^2 \Rightarrow y_k = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \ \textit{are points of max Temp}\ (2.25\ deg.)$$

ב. **מהי משוואת האיזותרמה העוברת דרך הראשית?** (5 נק')

האיזותרמות הן אליפסות <u>לא קנוניות</u> מהצורה $x^2+2y^2-x=C$

זו שעוברת בראשית עוברת דרך $(0,0)$ [או $(1,0)$] ומתקבל לכן $C=0$.

$$x^2+2y^2-x=0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2y^2=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{1/4}+\frac{y^2}{1/8}=1$$

צייר את גרדיאנט הטמפרטורה בראשית. הקפד על כיוונו המדויק וציין את גודלו. (5 נק').

החישוב מתחת, הגרדיאנט מצויר על התרשים הנתון.

$$\vec{\nabla} T_{(x,y)} = (2x-1)\hat{x}+4y\hat{y} \Rightarrow \vec{\nabla} T_{(0,0)} = -\hat{x}$$

4. שיטת מינימום הריבועים:

נתונות ארבע הנקודות הבאות: (0,0,0), (0,1,1), (1,1,1), (1,0,-1).

מצא את משוואת המישור $z=Ax+By+C$ ה"מתאים ביותר" לנקודות הנ"ל (x_i,y_i,z_i).

$$\sum_i [z_i-(Ax_i+By_i+C)]^2 = \sum_i (z_i-Ax_i-By_i-C)^2 \rightarrow min$$

$$\frac{d}{dA}\sum_i (z_i-Ax_i-By_i-C)^2 = 2\sum_i (z_i-Ax_i-By_i-C)(-x_i) = 0$$

$$\sum_i (Ax_i^2+Bx_iy_i+Cx_i-z_ix_i) = 0$$

$$A\sum_{i=1}^{4} x_i^2 + B\sum_{i=1}^{4} x_iy_i + C\sum_{i=1}^{4} x_i - \sum_{i=1}^{4} x_iz_i = 0 \quad => \quad 2A+B+2C-0 = 0$$

$$\frac{d}{dB}\sum_i (z_i-Ax_i-By_i-C)^2 = 2\sum_i (z_i-Ax_i-By_i-C)(-y_i) = 0$$

$$\sum_i (Ax_iy_i+By_i^2+Cy_i-z_iy_i) = 0$$

$$A\sum_{i=1}^{4} x_iy_i + B\sum_{i=1}^{4} y_i^2 + C\sum_{i=1}^{4} y_i - \sum_{i=1}^{4} z_iy_i = 0 \quad => \quad A+2B+2C-2 = 0$$

$$\frac{d}{dC}\sum_i (z_i-Ax_i-By_i-C)^2 = 2\sum_i (z_i-Ax_i-By_i-C)(-1) = 0$$

$$\sum_i (Ax_i+By_i+C-z_i) = 0$$

$$A\sum_{i=1}^{4} x_i + B\sum_{i=1}^{4} y_i + 4C - \sum_{i=1}^{4} z_i = 0 \quad => \quad 2A+2B+4C-1=0$$

$$\begin{cases} 2A+B+2C=0 \\ A+2B+2C=2 \\ 2A+2B+4C=1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) L_3 - L_1 \to L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) L_2 - \frac{1}{2}L_1 \to L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1.5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) L_3 - \frac{2}{3}L_2 \to L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\frac{4}{3}C = -\frac{1}{3} \quad => \quad C = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{2}B + C = 2 \quad => \quad \frac{3}{2}B - \frac{1}{4} = 2 \quad => \quad B = \frac{3}{2}$$

$$2A + B + 2C = 0 \quad => \quad 2A + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad => \quad A = -\frac{1}{2}$$

משוואת המישור ה"מתאים ביותר" לנקודות הנתונות היא:

$$\mathbf{Z} = -\frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{3}{2}\mathbf{y} - \frac{1}{4}$$

5. אינטגרל כפול: מעבר מקרטזי למוכלל

חשב את $\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\left(\frac{y}{2}\right)+1} \frac{1}{2}\boldsymbol{dxdy}$ בעזרת ההצבה $\boldsymbol{u}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{2x-y})$ ו- $\boldsymbol{v}=\frac{y}{2}$. (10 נק')

צייר את התחום *R* במישור $\boldsymbol{xy}$ (5 נק'). צייר את התחום המתאים במישור $\boldsymbol{uv}$ (10 נק').

$$\begin{cases} u=\frac{1}{2}(2x-y) \quad => \quad 2u=2x-y \quad => \quad 2u=2x-2v \quad => \quad x=u+v \\ v=\frac{y}{2} \quad => \quad y=2v \end{cases}$$

משוואות עבור הגבולות של R xy	משוואות עבור הגבולות של G uv	משוואות uv מפושטות
$x=\frac{y}{2}$	$u+v=v$	$u=0$
$x=\frac{y}{2}+1$	$u+v=v+1$	$u=1$
$y=0$	$2v=0$	$v=0$
$y=4$	$2v=4$	$v=2$

$$J_{(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad => \quad \int_0^2\int_0^1 dudv = \int_0^2 u\Big|_0^1 dv = \int_0^2 dv = v\Big|_0^2 = 2$$