1. טורים אינסופיים:

א. היעזר בשוויון $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ כדי להגיע לטור מקלורן של הפונקציה $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ (9 נק').

ב. מהו תחום ההתכנסות של הטור? (6 נק').

ג. רשום ביטוי ל- $f^{(n)}(0)$, הנגזרת מסדר n של $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$ כאשר $x=0$ (10 נק').

פיתרון א':

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} = x\cdot\frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad => \quad substitution \quad => \quad \frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \quad => \quad x\cdot\frac{1}{1-x^2} = x\cdot\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$$

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = x+x^3+x^5+x^7+\cdots+x^{2n+1}+\cdots$$

פיתרון ב':

$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$ הוא טור הנדסי שמנתו $q=x^2$. כידוע, התנאי להתכנסותו של טור הנדסי הוא $-1<q<1$.

$$-1<q<1 \quad => \quad -1<x^2<1 \quad => \quad x^2<1 \quad => \quad -1<x<1$$

פיתרון ג':

$$f^{(0)}_{(x)} = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots$$

$$f^{(0)}_{(0)} = f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}\Big|_{x=0} = 0$$

$$f^{(1)}_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} = 1 + 3x^2 + 5x^4 + 7x^6 + \cdots + (2n+1)x^{2n} + \cdots$$

$$f^{(1)}_{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}\Big|_{x=0} = 1$$

$$f^{(2)}_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2n(2n+1)x^{2n-1} = 6x + 20x^3 + 42x^5 + \cdots + 2n(2n+1)x^{2n-1} + \cdots$$

$$f^{(2)}_{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2n(2n+1)x^{2n-1}\Big|_{x=0} = 0$$

$$f^{(3)}_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n-1)2n(2n+1)x^{2n-2} = 6 + 60x^2 + 210x^4 + \cdots + (2n-1)2n(2n+1)x^{2n-2} + \cdots$$

$$f^{(3)}_{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n-1)2n(2n+1)x^{2n-2}\Big|_{x=0} = 6$$

$$f^{(4)}_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n-2)(2n-1)2n(2n+1)x^{2n-3} = 120x + 840x^3 + \cdots$$

$$f^{(4)}_{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n-2)(2n-1)2n(2n+1)x^{2n-3}\Big|_{x=0} = 0$$

$$f^{(5)}_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n-3)(2n-2)(2n-1)2n(2n+1)x^{2n-4} = 120 + 2520x^2 + \cdots$$

$$f^{(5)}_{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n-3)(2n-2)(2n-1)2n(2n+1)x^{2n-4}\Big|_{x=0} = 120$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & n \ even \\ n! & n \ odd \end{cases}$$

2. <u>גרדיאנט ונגזרת כיוונית:</u>

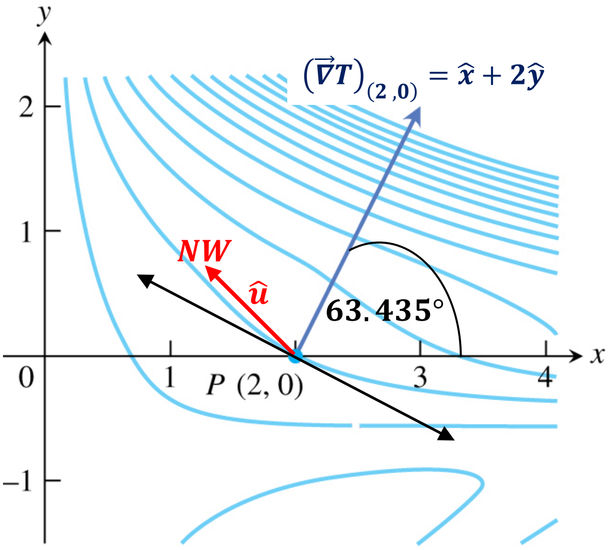
הטמפרטורה (במעלות צלזיוס) על פני משטח אופקי נתונה ע"י הביטוי $T(x,y) = xe^y + cos(xy)$.
נמלה נמצאת בנקודה $P(2,0)$. x ו-y בס"מ.

א. באיזה כיוון (במעלות, ביחס לכיוון ציר x החיובי) עליה לנוע, כדי שהטמפרטורה תגדל בקצב מרבי? (5 נק').
מהו קצב מרבי זה? (4 נק'). מהו השינוי המשוער בטמפרטורה, אם הנמלה תנוע 1 מ"מ בכיוון זה? (3 נק').

ב. באיזה כיוון עליה לנוע (במעלות, ביחס לכיוון ציר x החיובי) כדי שהטמפרטורה לא תשתנה? (5 נקו').

ג. מהו השינוי המשוער בטמפרטורה, אם הנמלה תנוע 1 מ"מ בכיוון צפון-מערב ? (8 נק')

<u>פיתרון א'</u> : אנו נשאלים בעצם מהו כיוונו של הגרדיינט בנקודה $P(2,0)$ ומהו גודלו.



באיור מתוארים קווי הרמה (כחול) של T .
הגרדיינט $\vec{\nabla}T$ בנקודה, מאונך לקו הרמה בנקודה.
החיצים השחורים שייכים לסעיף ב׳.
$\hat{u} = North - West$ שייך לסעיף ג׳.

חישוב הגרדיינט של $T(x,y) = xe^y + cos(xy)$ ב- $P(2,0)$:

$$T_{x(2,0)} = e^y - ysin(xy)\Big|_{(2,0)} = e^0 - 0sin(0) = 1$$

$$T_{y(2,0)} = xe^y - xsin(xy)\Big|_{(2,0)} = 2 - 2sin(0) = 2$$

הגרדיינט של T בנקודה $P(2,0)$ הינו :

$$(\vec{\nabla}T)_{(2,0)} = T_{x(2,0)}\hat{x} + T_{y(2,0)}\hat{y} = \hat{x} + 2\hat{y}$$

$$arctg2 = 63.435°$$

$$|\vec{\nabla}T|_{(2,0)} = \sqrt{T_{x(2,0)}^{\ 2} + T_{y(2,0)}^{\ 2}} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \ \ °C/cm$$

השינוי המשוער בטמפ' אם הנמלה תנוע 1 מ"מ בכיוון זה הוא $|\vec{\nabla}T|_{(2,0)} \cdot \Delta S = \sqrt{5} \cdot 0.1 = \frac{\sqrt{5}}{10} = 0.2236 \ °C$

<u>פיתרון ב'</u> : כדי שהפונקציה (הטמפרטורה) לא תשתנה, יש לנוע במאונך לגרדיינט, ז"א להוסיף או להפחית $90°$.

התשובה היא לכן $153.435°$ או $-26.565°$ (כיווני החיצים השחורים באיור - מאונכים לכיוון הגרדיינט).

<u>פיתרון ג'</u> : ראשית יש לחשב את הנגזרת הכיוונית בכיוון $\hat{u} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y}$ (צפון-מערב):

$$\left(\frac{dT}{ds}\right)_{\hat{u},(2,0)} = (\vec{\nabla}T)_{(2,0)} \cdot \hat{u} = (\hat{x} + 2\hat{y}) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ °C/cm$$

השינוי המשוער בטמפ' אם הנמלה תנוע 1 מ"מ בכיוון $\hat{u}$ (צפון-מערב) הוא :

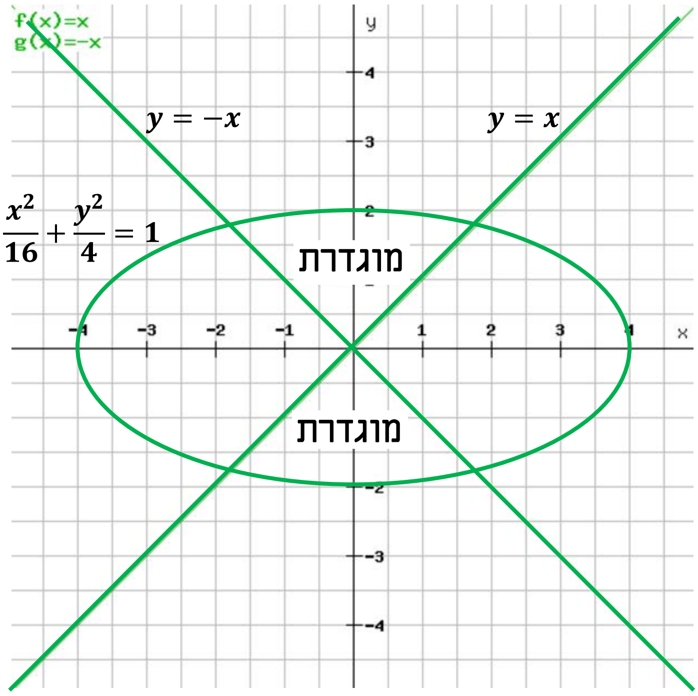
$$\left(\frac{dT}{ds}\right)_{\hat{u},(2,0)} \cdot \Delta S = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0.1 = \frac{\sqrt{2}}{20} \approx 0.07071 \ °C$$

3. <u>פונקציה בעלת שני משתנים ודיפרנציאל שלם:</u>

א. שרטט את תחום ההגדרה של $f(x,y)=\sqrt{y^2-x^2}-\sqrt{16-x^2-4y^2}$ (13 נק')

ב. חשב בקירוב, תוך שימוש בדיפרנציאל השלם, את $1.01^{1.999}$ (12 נק')

<u>פיתרון א'</u> :



$$y^2-x^2\geq 0 \quad => \quad (y+x)(y-x)\geq 0$$

$$1)\quad (y+x)\geq 0 \ \cap \ (y-x)\geq 0$$

$$y\geq -x \ \cap \ y\geq x$$

$$2)\quad (y+x)\leq 0 \ \cap \ (y-x)\leq 0$$

$$y\leq -x \ \cap \ y\leq x$$

$$3)\quad 16-x^2-4y^2\geq 0 \quad => \quad x^2+4y^2\leq 16$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}\leq 1$$

<u>פיתרון ב'</u> :

$$z_{(x,y)}=x^y \quad => \quad z_{(1\ ,\ 2)} = 1^2=1 \quad , \quad z_{(1.01\ ,\ 1.999)} = 1.01^{1.999}=?$$

$$z_x=y\cdot x^{y-1} \quad => \quad z_{x(1\ ,\ 2)} = 2\cdot 1^1 = 2 \quad , \quad \Delta x = 1.01-1 = 0.01$$

$$z_y=x^y\cdot lnx \quad => \quad z_{y(1\ ,\ 2)} = 1^2\cdot ln1 = 0 \quad , \quad \Delta y = 1.999-2 = -0.001$$

$$\Delta z = z_x\cdot\Delta x+ z_y\cdot\Delta y = 2\cdot 0.01+0\cdot(-0.001) = 0.02$$

$$z_{(1.01\ ,\ 1.999)} = 1.01^{1.999} \approx z_{(1\ ,\ 2)}+\Delta z = 1+0.02 = 1.02$$

וכמה זה ע"פ המחשבון? 1.02008985

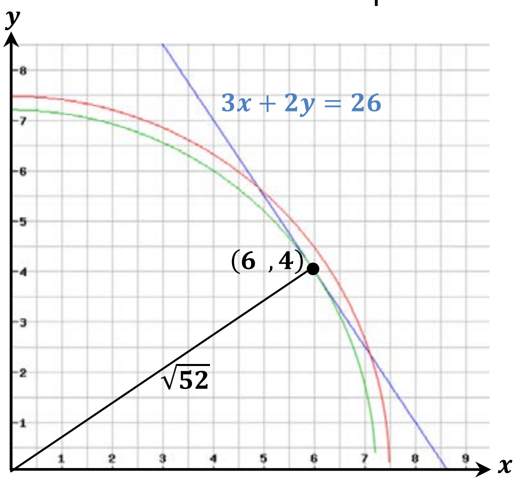
4. <u>לגרנז' ורציפות של פונקציה בעלת שני משתנים:</u>

א. בעזרת לגרנז' מצא על הישר $3x + 2y = 26$ את הנקודה הקרובה ביותר לראשית הצירים. (10נק').

<u>פיתרון א':</u>

כשאנו דנים במרחק מראשית הצירים, אנו דנים בעצם ברדיוס **R** של מעגל קנוני מהצורה $R^2 = x^2 + y^2$.

עלינו לגלות היכן מעגל כזה משיק לעקומה, וכך נקבל את הנקודה עליה שהינה הקרובה ביותר לראשית.



קווי הרמה של $f_{(x,y)} = x^2 + y^2$ הם המעגלים $x^2 + y^2 = c$.

ככל שהמעגלים קטנים יותר, f קטנה יותר.

אנו מעוניינים בערך המינימאלי של $f_{(x,y)}$ תחת התנאי שהנקודה (x, y) נמצאת **גם** על העקום $3x + 2y = 26$.

מבין כל המעגלים אשר חותכים את העקום $3x + 2y = 26$, איזה הוא הקטן ביותר? **זה אשר משיק לעקום.**

נתאים את הבעיה לתבנית לגרנז' עם $f_{(x,y)} = x^2 + y^2$ ו- $g_{(x,y)} = 3x + 2y - 26$, ונחפש את הערכים של x , y ו- λ אשר מקיימים את המשוואות $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$ ו- $g_{(x,y)} = 0$

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \quad => \quad 2x\hat{x} + 2y\hat{y} = \lambda(3\hat{x} + 2\hat{y}) \quad => \quad 2x = 3\lambda \ , \ 2y = 2\lambda \quad => \quad 2x = 3y \quad => \quad y = \frac{2}{3}x$$

$$g_{(x,y)} = 0 \quad => \quad 3x + 2y = 26 \quad => \quad 3x + \frac{4}{3}x = 26 \quad => \quad x = 6 \quad => \quad y = \frac{2}{3}x = 4 \quad , \quad (6\ ,\ 4)$$

למרות שלא התבקשנו, נציב נקודה זו ב- $f_{(x,y)}$ כדי לקבל את ערך המינימום שלה על העקום $3x + 2y = 26$:

$$f_{(6\ ,4)} = 6^2 + 4^2 = 52$$

אם כך, המרחק המינימאלי של העקומה $3x + 2y = 26$ מראשית הצירים הוא $\sqrt{52}$ יח' אורך.

ב.   נתונה הפונקציה $g(x,y)=\frac{2x-y}{2\sqrt{x}-\sqrt{2y}}$. מהו תחום ההגדרה שלה? (5 נק')

מצא את הפונקציה *h(x)* שעבורה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x-y}{2\sqrt{x}-\sqrt{2y}} & y\neq 2x\\ h(x) & y=2x\end{cases}$

רציפה בכל נקודה שברביע הראשון. (10 נקו')

<u>פיתרון ב':</u>

תחום ההגדרה של g מוגבל לרביע הראשון בשל השורשים, לכן $0\le x$, $0\le y$.

כמו כן, כדי שלא יתאפס המכנה, חייב להתקיים $y\neq 2x$ <= $4x\neq 2y$ <= $2\sqrt{x}\neq\sqrt{2y}$

אם כך, במשטח הפונקציה g ישנו חריץ אשר צילו נופל על מישור xy לאורך הישר $y=2x$, ברביע הראשון.

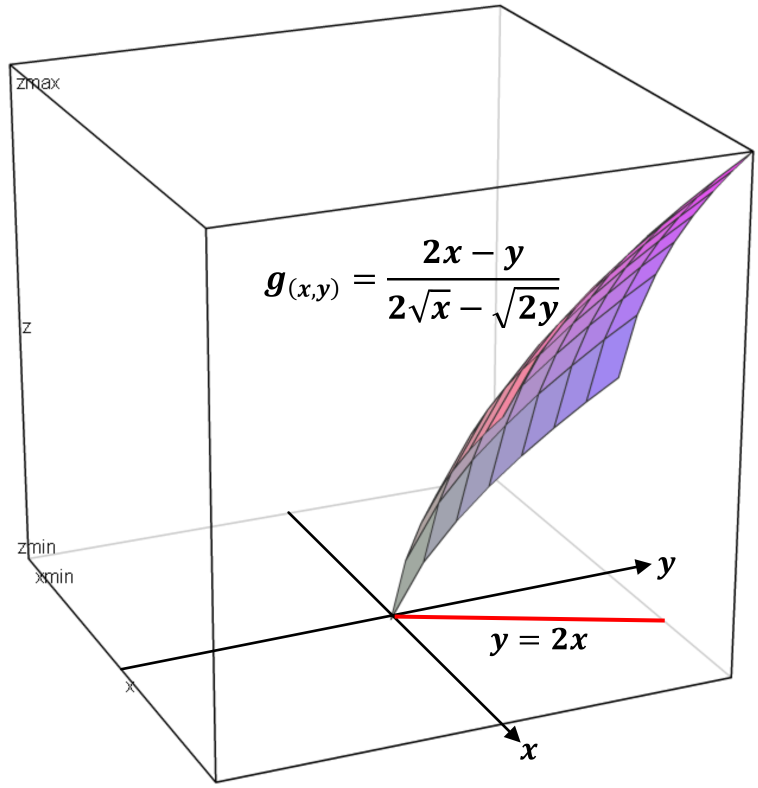
כדי להשיג רציפות, יש "לסתום" את החריץ, ולשם כך עלינו לדעת מהו ערכה של g בכל נקודה שעל שפת החריץ.

$$g^*_{(x,y)}=\frac{2x-y}{2\sqrt{x}-\sqrt{2y}}\cdot\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{2y}}{2\sqrt{x}+\sqrt{2y}}=\frac{(2x-y)(2\sqrt{x}+\sqrt{2y})}{4x-2y}=\frac{(2x-y)(2\sqrt{x}+\sqrt{2y})}{2(2x-y)}=\frac{(2\sqrt{x}+\sqrt{2y})}{2}$$

כעת אפשר להציב בפונקציה $y=2x$, ומתקבל $g^*_{(x,2x)}=\frac{(2\sqrt{x}+\sqrt{2\cdot 2x})}{2}=\frac{(2\sqrt{x}+2\sqrt{x})}{2}=2\sqrt{x}$

מסתבר שבכל נקודה (x,y) שעל שפת החריץ, מתקיים $g=2\sqrt{x}$.

אם כך, $h(x)=2\sqrt{x}$ תעשה את העבודה ותסתום את החריץ שבמשטח הפונקציה g .



במשטח הפונקציה g ישנו חריץ, **שצילו**

על מישור xy הוא **הקו האדום**.

משטח הפונקציה h חותך את משטח

הפונקציה g בדיוק היכן שנמצא החריץ,

ולכן אותן נקודות על h שבהן מתקיים

$y=2x$ (אלה שמעל **הקו האדום**),

משמשות לסתימת החריץ.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x-y}{2\sqrt{x}-\sqrt{2y}} & y\neq 2x\\ 2\sqrt{x} & y=2x\end{cases}$$

5. <u>אינטגרל כפול:</u>

נתון האינטגרל $\iint_R (2x^2 - xy - y^2)\,dxdy$, כש- R הוא האזור ברביע הראשון אשר תחום ע"י הישרים $y = x + 1$, $y = x - 2$, $y = -2x + 7$, $y = -2x + 4$.

א. שרטט את ארבעת הישרים **באופן מדויק** על מערכת צירים, וליד **כל קודקוד** של התחום R אשר התקבל רשום ערכי (x, y) מתאימים.
כל שתי משבצות במחברת הבחינה תייצגנה 1 יחידת אורך. (5 נק').

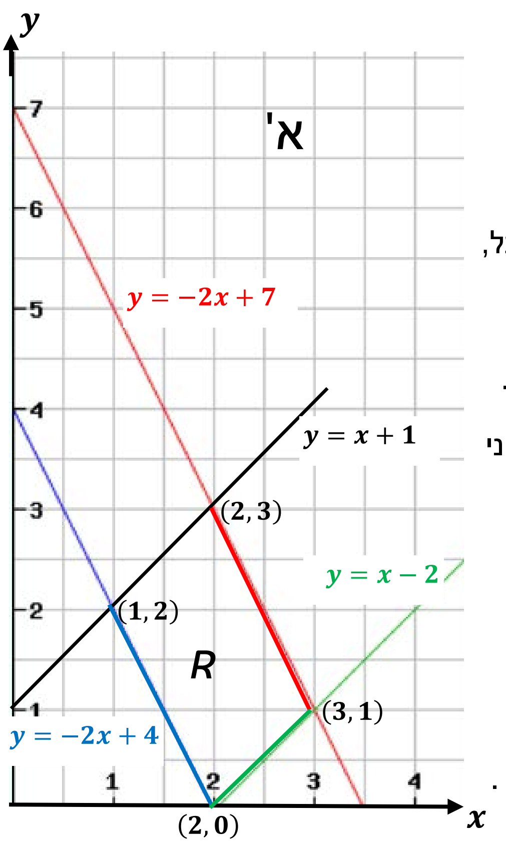
ב. רשום את האינטגרל בקואורדינטות קרטזיות, כשגבולותיו רשומים **במפורש**.
סדר האינטגרציה כרצונך. (2.5 נק')

ג. שרטט במישור uv את התחום G אשר מתקבל מההתמרה $\begin{cases} v=2x+y \\ u=x-y \end{cases}$, וליד כל קודקוד של התחום רשום ערכי (u, v) מתאימים.
כל שתי משבצות במחברת הבחינה תייצגנה 1 יחידת אורך. (5 נק')

ד. חשב את ערכו של היעקוביאן $J_{(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$. (2.5 נק')

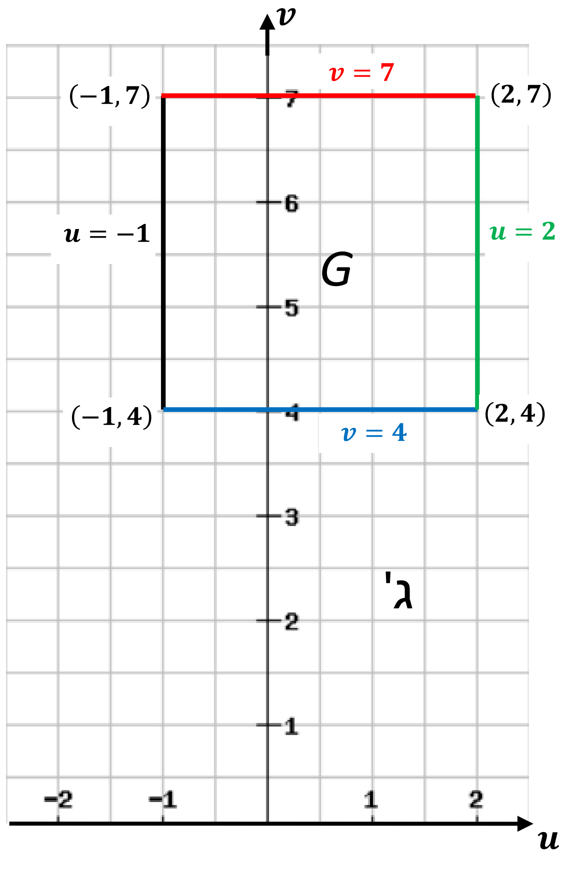
ה. פתור את האינטגרל תחת ההתמרה הנתונה. (10 נק')

<u>פיתרון:</u>



<u>דיון לסעיף ב'</u>

על פי התחום R שהתקבל, לא ניתן לחשב את האינטגרל ב"פעם אחת". יש לחלק את התחום לשני תת-תחומים לפחות אם סדר האינטגרציה הינו $dydx$, ולשלושה תת-תחומים לפחות אם סדר האינטגרציה הינו $dxdy$.



ב. רישום של האינטגרל כך שגבולותיו רשומים באופן מפורש :

$$\iint_R (2x^2 - xy - y^2)\,dxdy = \int_1^2 \int_{-2x+4}^{x+1} (2x^2 - xy - y^2)\,dydx + \int_2^3 \int_{x-2}^{-2x+7} (2x^2 - xy - y^2)\,dydx$$

ד.

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = 2x + y \end{cases} \Rightarrow u + v = 3x \Rightarrow x = \frac{u}{3} + \frac{v}{3} \quad , \quad y = x - u = \frac{u+v}{3} - u \Rightarrow y = \frac{v}{3} - \frac{2u}{3}$$

$$J_{(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \Rightarrow J_{(u,v)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

ה. חישוב האינטגרל תחת ההתמרה הנתונה :

$$\iint_R f_{(x,y)}\,dxdy = \iint_G f_{[g(u,v),h(u,v)]} \left|J_{(u,v)}\right| dudv$$

$$\iint_R (2x + y)(x - y)\,dxdy = \int_4^7 \int_{-1}^{2} (v)(u)\left(\frac{1}{3}\right) dudv = \frac{1}{3} \int_4^7 \left[v\frac{u^2}{2} \Big|_{-1}^{2} \right] dv =$$

$$= \frac{1}{6} \int_4^7 v(2^2 - (-1)^2)\,dv = \frac{3}{6} \int_4^7 vdv = \frac{1}{2} \left[\frac{v^2}{2} \Big|_4^7 \right] =$$

$$= \frac{1}{4}(7^2 - 4^2) = \frac{33}{4} = 8\tfrac{1}{4}$$