1. <u>טורים אינסופיים:</u>

נתונה הסדרה האינסופית: $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots$

א. רשום את הנוסחה ל-a_n (2 נקו'), חשב את $\lim_{n\to\infty} a_n$ (2 נקו') והאם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס (הסבר)? (2 נקו').

ב. האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ מתכנס? נמק. (8 נקו').

ג. מצא את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(1-a_n)x^{2n}$ (11 נקו').

פיתרון:

א.

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots, \frac{n}{n+2} \quad => \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1 \quad => \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אינו מתכנס כי $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ הינו תנאי הכרחי (אם כי בלתי מספיק) להתכנסות.

ב.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-a_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{n}{n+2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2} = 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n+2}+\cdots\right)$$

מדובר פה בפעמיים הטור ההרמוני (ללא שני איבריו הראשונים אומנם), ז"א בפעמיים סכום אינסופי, ז"א בטור מתבדר.

ג.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-a_n)x^{2n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n+2} = 2\left(\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{5}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n+2}+\cdots\right)$$

ניגש למבחן המנה. אין בטור איברים שליליים, ולכן אין צורך להשתמש בערך מוחלט.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}}{n+3}\cdot\frac{n+2}{x^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}\cdot x^2 = x^2 \quad \to \quad x^2 < 1 \quad => \quad -1 < x < 1$$

כאשר $1 < x$ או $x < -1$ הטור מתבדר לבטח, כי $\lim_{x\to\infty} a_n \neq 0$

כאשר $x = \pm 1$ מתקבל המקרה שבסעיף ב' – טור מתבדר.

לסיכום, תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(1-a_n)x^{2n}$ הוא $-1 < x < 1$.

2. <u>גבול ונגזרת כיוונית:</u>

א. חשב את הגבול: $lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)}\frac{sin\,(x(y^2+z^2)}{xy^2}$ (10 נקו').

<u>פיתרון א'</u> : מאחר ו- y,z אינם שואפים ל- $\mathbf{0}$, נציב $y=1$ ו- $z=2$ ונקבל:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)}\frac{sin[x(y^2+z^2)]}{xy^2} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \lim_{x\to0}\frac{sin[x(1^2+2^2)]}{x1^2} = \lim_{x\to0}\frac{sin\,5x}{x} = 5\lim_{x\to0}\frac{sin\,5x}{5x} =$$
$$= 5\cdot1 = 5$$

ב. מה יהיה השינוי המשוער של $T(x,y,z)=cos(\pi xy)+xz^2$ אם נזוז מהנקודה P(-1,-1,-1) אל הראשית מרחק של ds=0.1 יחידות (10 נקו')? מדוע משוער? הסבר במילים איך ניתן לחשב בצורה מדויקת (5 נקו')?

<u>פיתרון ב'</u> :

T היא פונקציה היא של שלושה משתנים, ז"א תחום הגדרתה הוא המרחב x,y,z . נניח שהיא מתארת טמפרטורה הנמדדת במעלות צלסיוס ($°C$), ושיעוריה של כל נקודה (x,y,z) נמדדים במטרים (m).

$$T_{(P)} = T_{(-1,-1,-1)} = cos(\pi)-1 = -2° \quad => \quad P(-1,-1,-1,-2)$$

בשלב ראשון נחשב וקטור הכיוון $\hat{A}$ מהנקודה P(-1,-1,-1) לראשית :

$$\vec{A}_{(P\to origin))} = (0,0,0)-(-1,-1,-1) = (1,1,1)$$

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{y}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{z}$$

התבקשנו לשער באיזו מידה תשתנה הטמפרטורה אם נזוז מהנקודה **P(-1,-1,-1)** מרחק של **0.1m** בכיוון $\hat{A}$.

לשם כך עלינו לחשב נגזרת כיוונית - הנגזרת של הפונקציה T בכיוון $\hat{A}$:

שלב א': מציאת $\vec{\nabla}T(x,y,z)$ - הגרדיינט של הפונקציה :

$$\vec{\nabla}T(x,y,z) = [-\pi y\,sin(\pi xy)+z^2]\hat{x} + [-\pi x\,sin(\pi xy)]\hat{y} + [2xz]\hat{z}$$

שלב ב': חישוב $\vec{\nabla}T_{(-1,-1,-1)}$ - ערכו של הגרדיינט בנקודה **P(-1,-1,-1)** :

$$\vec{\nabla}T_{(-1,-1,-1)} = [\pi\,sin(\pi)+1]\hat{x} + [\pi\,sin(\pi)]\hat{y} + [2]\hat{z}$$

$$\vec{\nabla}T_{(-1,-1,-1)} = \hat{x}+2\hat{z} \quad °C/m$$

שלב ג' - חישוב ההיטל של $\vec{\nabla}T_{(-1,-1,-1)}$ בכיוון $\hat{A}$:

$$\vec{\nabla}T_{(-1,-1,-1)}\cdot\hat{A} = (\hat{x}+0\hat{y}+2\hat{z})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{y}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{z}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ °C/m$$

אם נזוז מהנקודה **P(-1,-1,-1)** מרחק ds מטרים בכיוון הראשית, יהיה השינוי המשוער ב- T שווה ל- $\sqrt{3}ds\ °C$.

לפיכך, אם $ds=0.1m$, השינוי המשוער ב- T יהיה $\sqrt{3}ds=\sqrt{3}\cdot0.1=\frac{\sqrt{3}}{10}\ °C$.

ככל ש- ds קצר יותר, מהווה $\sqrt{3}ds$ אומדן מדויק יותר לשינוי ב- T. כאשר $ds\to0$, $\Delta T=\sqrt{3}ds\ °C$.

כדי לחשב את השינוי ב- T בצורה מדויקת, יש להציב ב- $T_{(x,y,z)}$ את שיעורי הנקודה שאליה זזנו ולקבל את הטמפרטורה בנקודה זו. אח"כ יש להפחית מהטמפרטורה שהתקבלה את הטמפרטורה בנקודה P $(-2°)$.

5. <u>אינטגרל כפול:</u>

נתון האינטגרל הכפול $\int_0^{a/\sqrt{2}} dx \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}-x} (H - \frac{\sqrt{2}H}{a}x - \frac{\sqrt{2}H}{a}y)dy$, $0 < a$, $0 < H$

א. שרטט את הגוף על מערכת צירים תלת ממדית. כיצד נקרא הגוף ? (5 נקו').

ב. הנח: $a = \sqrt{2}$ מטר, H=4 מטר. חותכים את הגוף לאורך המישור $x = \frac{3}{4}$ באמצעות מסורית שעובייה $1mm$.

I. צייר את צורת החלק שהפך לנסורת (החריץ שמותירה המסורית) (5 נקו') .

II. חשב את נפח הנסורת שתתקבל (נפח החריץ) (5 נקו').

III. הסבר היכן נמצא הגוף המנוסר באינטגרל הנתון (5 נקו').

IV. מהי המשמעות של האינטגרל ביחס לגוף המנוסר? (5 נקו').

פיתרון א' : ננסה קודם כל להבין מהי צורתו של בסיס הגוף, אשר מונח על מישור xy .

האינטגרציה הראשונה היא לפי y - נוצר "קיר" מאונך לציר ה- x , אשר כלוא בינו לבין הישר $y = \frac{a}{\sqrt{2}} - x$.

האינטגרציה השנייה היא לפי x - ה"קירות" מוצמדים זה לזה, החל בשמאלי אשר "עומד" ב- $x = 0$ (ז"א על ציר ה- y) וכלה בימני אשר "עומד" ב- $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

בסיס הגוף תחום אם כן ע"י הישרים $y = 0$, $x = 0$, $y = \frac{a}{\sqrt{2}} - x$ (ראה האיור שלמטה).

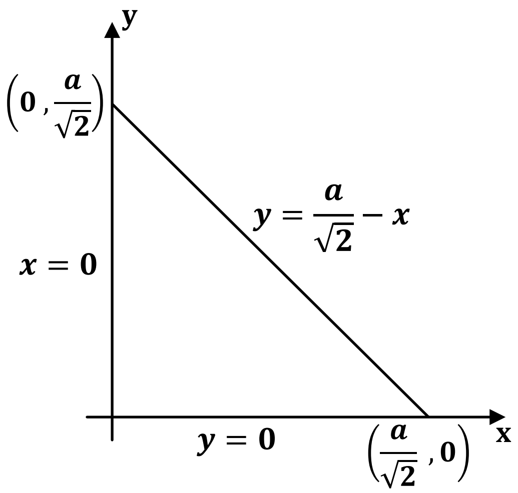
משטח הפונקציה הוא מישור משופע, זה ברור (?), אך האם הוא חותך את מישור xy לאורך הישר $y = \frac{a}{\sqrt{2}} - x$?

נברר זאת באמצעות איפוס הפונקציה (z):

$$Z = H - \frac{\sqrt{2}H}{a}x - \frac{\sqrt{2}H}{a}y = 0 \quad => \quad \frac{\sqrt{2}}{a}y = 1 - \frac{\sqrt{2}}{a}x \quad => \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}} - x$$

משטח הפונקציה אכן חותך את מישור xy לאורך הישר $y = \frac{a}{\sqrt{2}} - x$ (זה לא מובן מאליו, אך כך הונדסה הבעיה).

סיכום:



בסיס הגוף הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים, כמתואר באיור שמשמאל.

כל שוק (ניצב) היא צלע תחתונה של **דופן אנכית** אשר "יוצאת" מהדף

(צלעה העליונה של הדופן **אינה מקבילה** לתחתונה).

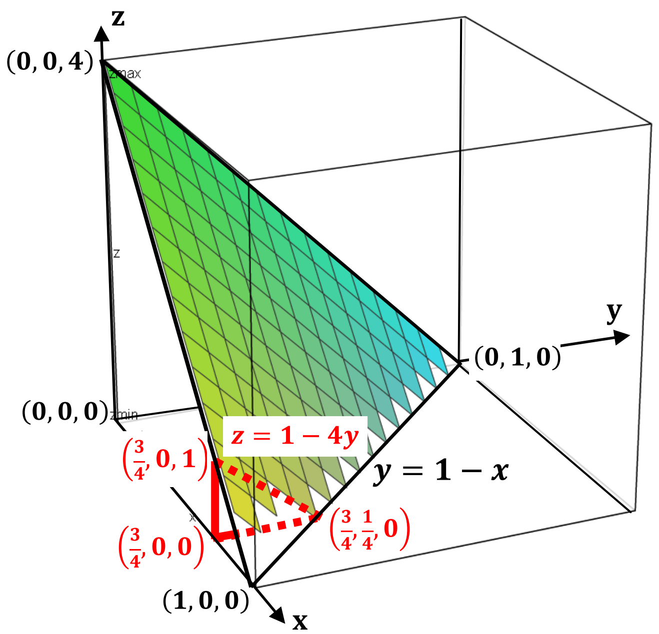
היתר הוא החיתוך של משטח הפונקציה עם מישור xy .

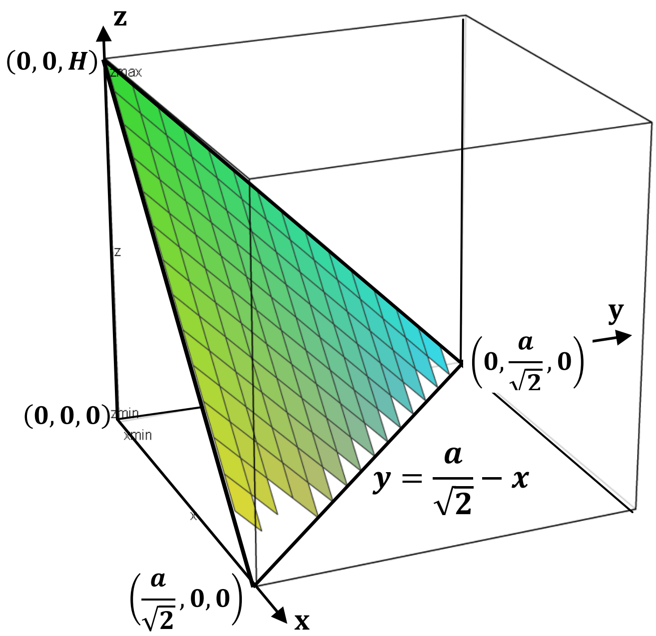
משטח הפונקציה הוא מישור משופע אשר חותך את ציר z בגובה H :

$$Z_{(x,y)} = H - \frac{\sqrt{2}H}{a}x - \frac{\sqrt{2}H}{a}y \quad => \quad Z_{(0,0)} = H$$

זהו, בידינו כל המידע הדרוש לסרטוט תלת מימדי של הגוף.

סרטוט הגוף בתלת מימד (לא פרופורציונאלי – מימד הגובה z מכווץ פי 4) בדף הבא.





גוף זה נקרא פירמידה משולשת ישרת זווית. באיור השמאלי מוצבים הנתונים של סעיף ב' ומתואר **הגוף המנוסר**.

פיתרון ב' : $a = \sqrt{2}\ m$, $H = 4m$. חותכים את הגוף לאורך המישור $x = \frac{3}{4}$ באמצעות מסורית שעובייה $1mm$.

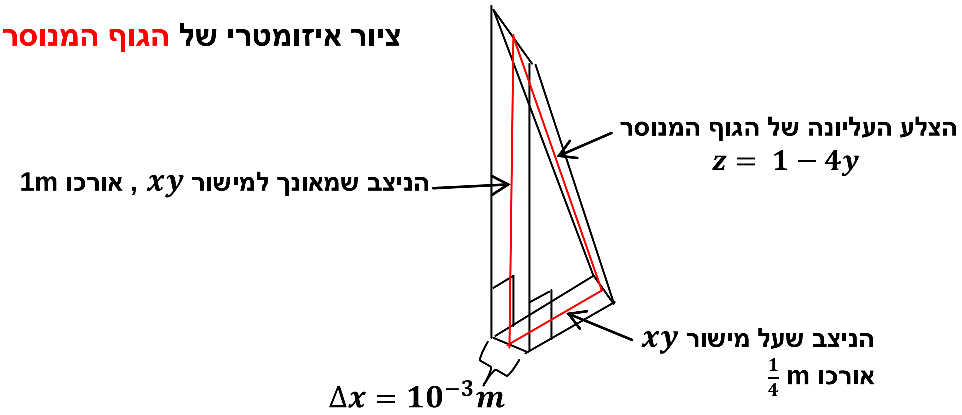
I. נציב בפונקציה $x = \frac{3}{4}$ ונקבל את משוואת צלעו העליונה של **הגוף המנוסר** (**זו הנוגעת במשטח הפונקציה**) :

$$z_{(x,y)} = 4 - 4x - 4y \quad => \quad z_{\left(\frac{3}{4},y\right)} = 4 - 4\cdot\frac{3}{4} - 4y \quad => \quad z_{\left(\frac{3}{4},y\right)} = 1 - 4y$$

הגוף המנוסר הוא משולש ישר זווית אשר היתר שלו הוא הצלע העליונה שמצאנו.

הוא מהווה "פרוסה אחת" מהפירמידה – פרוסה שעובייה $\Delta x = 10^{-3}m$ ואשר ממוקמת ב- $x = \frac{3}{4}m$.

ציור איזומטרי של הגוף המנוסר



II. נפח הגוף המנוסר (נניח שבשל דקותו נכונים אורכי הניצבים המצוינים באיור **לכל** x ש"כלול" בעובי המשורית) :

אורך הניצב אשר מונח על מישור xy הוא $\frac{1}{4}m$. אורך הניצב המאונך למישור xy הוא $1m$.

שטחו של המשולש שווה לחצי מכפלת ניצביו : $A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\cdot 1\right) = \frac{1}{8}\ m^2$.

נפחו שווה למכפלת שטחו בעוביו : $V = A\cdot\Delta x = \frac{1}{8}\cdot 10^{-3}\ m^3$.

ככל שהגוף המנוסר עבה יותר, שונה יותר נפחו האמיתי מזה שחישבנו לעיל. האם $10^{-3}m$ זה "דק" ?

ובכן, יחסית למידותיו האחרות של הגוף המנוסר, $10^{-3}m$ זה "דק מאוד". נערוך חישוב מדויק וניווכח:

נפרוס את הפרוסה שעובייה $\Delta x = 10^{-3}m$, הממוקמת ב- $x = \frac{3}{4}m$, לאינסוף פרוסות דקיקות שעוביין dx .

הפרוסה הראשונה "עומדת" ב- $x = \frac{3}{4} - \frac{\Delta x}{2}$, והאחרונה "עומדת" ב- $x = \frac{3}{4} + \frac{\Delta x}{2}$.

נפחה של כל פרוסה קטן משל קודמתה – המשולשים הופכים בהדרגה קטנים יותר בשטחם.

$$\int_{\frac{3}{4}-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3}{4}+\frac{\Delta x}{2}} \int_0^{1-x} (1-4y)dydx \quad = \quad \int_{\frac{3}{4}-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3}{4}+\frac{\Delta x}{2}} (y-2y^2)\Big|_0^{1-x} dx \quad =$$

$$= \int_{\frac{3}{4}-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3}{4}+\frac{\Delta x}{2}} [1-x-2(1-x)^2]\, dx \quad = \quad \int_{\frac{3}{4}-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3}{4}+\frac{\Delta x}{2}} (-2x^2+3x-1)\, dx \quad =$$

$$= \left[\frac{-2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x\right|_{\frac{3}{4}-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{3}{4}+\frac{\Delta x}{2}} \quad =$$

$$\frac{-2\left(\frac{3}{4}+\frac{\Delta x}{2}\right)^3}{3} + \frac{3\left(\frac{3}{4}+\frac{\Delta x}{2}\right)^2}{2} - \left(\frac{3}{4}+\frac{\Delta x}{2}\right) - \left[\frac{-2\left(\frac{3}{4}-\frac{\Delta x}{2}\right)^3}{3} + \frac{3\left(\frac{3}{4}-\frac{\Delta x}{2}\right)^2}{2} - \left(\frac{3}{4}-\frac{\Delta x}{2}\right)\right] =$$

$$\frac{-2\left(\frac{1501}{2000}\right)^3}{3} + \frac{3\left(\frac{1501}{2000}\right)^2}{2} - \left(\frac{1501}{2000}\right) - \left[\frac{-2\left(\frac{1499}{2000}\right)^3}{3} + \frac{3\left(\frac{1499}{2000}\right)^2}{2} - \left(\frac{1499}{2000}\right)\right] \quad =$$

$$= \quad 0.124999833 \cdot 10^{-3} \approx 0.125 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{8} \cdot 10^{-3}\, m^3$$

III. המקום בו נמצא **הגוף המנוסר** באינטגרל הנתון :

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (4-4x-4y)dy \quad = \quad \int_0^1 \int_0^{1-x} (4-4x-4y)dydx \quad = \quad \int_0^1 A_{(x)}dx \quad = \quad \int_0^1 dV_{(x)}$$

IV. משמעותו של האינטגרל ביחס לגוף המנוסר היא הצמדתם של אינסוף "גופים מנוסרים" כאלה זה לזה, **תוך שעוביו של כ"א מהם שואף לאפס**, החל בזה העומד ב- $x = 0$ וכלה בזה העומד ב- $x = 1$.

יתקבל אז נפחה של הפירמידה המשולשת ישרת הזווית מסעיף א'.

נחשב נפח זה של הפירמידה המשולשת ישרת הזווית מסעיף א', למרות שלא התבקשנו לעשות זאת:

דרך א', בעזרת אינטגרל כפול:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (4-4x-4y)dydx = \int_0^1 (4y-4xy-2y^2)\Big|_0^{1-x} dx =$$

$$\int_0^1 (4(1-x)-4x(1-x)-2(1-x)^2)\, dx =$$

$$\int_0^1 [4-4x-4x+4x^2-2(1-2x+x^2)]\, dx =$$

$$\int_0^1 (4-4x-4x+4x^2-2+4x-2x^2)\, dx =$$

$$\int_0^1 (2x^2-4x+2)\, dx = \left[\frac{2x^3}{3}-2x^2+2x\right|_0^1 = \frac{2}{3}-2+2 = \frac{2}{3}\, m^3$$

דרך ב', בשיטה הקלאסית - שליש שטח בסיס הפירמידה כפול גובהה:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\cdot A\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\frac{1\cdot 1}{2}\cdot 4 = \frac{2}{3}\, m^3}$$

יותר קל בשיטה היוונית...