מצא ואפיין את נקודות הקיצון של $f(x,y)=xy\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

יש לבחור תשובה אחת:

a. $(0,0)$ אוכף, $(1,1)$ מקסימה, $(1,-1)$ מינימה.

b. $(0,0)$ אוכף, $(-1,-1)(1,1)$ מינימום, $(-1,1)(1,-1)$ מקסימום.

c. $(0,0)$ אוכף, $(-1,-1)(1,1)$ מקסימום, $(-1,1)(1,-1)$ מינימום.

d. $(0,0)$ אוכף, $(1,1)$ מינימה, $(1,-1)$ מקסימה.

נניח ש- $f_{(x,y)}$ ונגזרותיה החלקיות הראשונות והשניות רציפות על פני דסקה פתוחה שמרכזה (a,b), וש- $f_{x(a,b)}=f_{y(a,b)}=0$. או אז,

1) ל- f יש מקסימום מקומי ב- (a,b) אם $f_{xx}<0$ ו- $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2>0$ ב- (a,b) .

2) ל- f יש מינימום מקומי ב- (a,b) אם $f_{xx}>0$ ו- $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2>0$ ב- (a,b) .

3) ל- f יש נקודת אוכף ב- (a,b) אם $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2<0$ ב- (a,b) .

4) המבחן אינו חד משמעי ב- (a,b) אם $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2=0$ ב- (a,b) .

$$f_{(x,y)} = xy\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\begin{cases} f_x = y\left(e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - x^2\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right) = y(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\ f_y = x\left(e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - y^2\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right) = x(1-y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x = 0 \quad => \quad y(1-x^2)=0 \quad => \quad y=0 \;\; or \;\; x=\pm 1 \\ f_y = 0 \quad => \quad x(1-y^2)=0 \quad => \quad x=0 \;\; or \;\; y=\pm 1 \end{cases}$$

Suspected points:

$$\left(1\;,1\;,\frac{1}{e}\right) \qquad \left(1\;,-1\;,-\frac{1}{e}\right) \qquad \left(-1\;,1\;,-\frac{1}{e}\right) \qquad \left(-1\;,-1\;,\frac{1}{e}\right) \qquad (0\;,0\;,0)$$

$$f_x = ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1-x^2) \quad => \quad \begin{cases} f_{xx} = y\left[-xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1-x^2) - 2xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right] = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(x^2-3) \\ f_{xy} = (1-x^2)\left[e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right] = (1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1-xy) \end{cases}$$

$$f_y = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1-y^2) \quad => \quad f_{yy} = x\left[-ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1-y^2) - 2ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right] = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(y^2-3)$$

$$f_{xx} = xy(x^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \quad , \quad f_{xy} = (1-x^2)(1-xy)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \quad , \quad f_{yy} = xy(y^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$\left(1 \; ,1 \; ,\frac{1}{e}\right)$ ***suspected***

$$f_{xx}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = -\frac{2}{e} \quad , \quad f_{xy}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 0 \quad , \quad f_{yy}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = -\frac{2}{e}$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = \frac{4}{e^2} > 0 \quad , \quad f_{xx} < 0 \quad => \quad \left(1 \; ,1 \; ,\frac{1}{e}\right) \; \textit{maximum}$$

$\left(1 \; ,-1 \; ,-\frac{1}{e}\right)$ ***suspected***

$$f_{xx}\Big|_{\substack{x=1\\y=-1}} = \frac{2}{e} \quad , \quad f_{xy}\Big|_{\substack{x=1\\y=-1}} = 0 \quad , \quad f_{yy}\Big|_{\substack{x=1\\y=-1}} = \frac{2}{e}$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = \frac{4}{e^2} > 0 \quad , \quad f_{xx} > 0 \quad => \quad \left(1 \; ,-1 \; ,-\frac{1}{e}\right) \; \textit{minimum}$$

$\left(-1 \; ,1 \; ,-\frac{1}{e}\right)$ ***suspected***

$$f_{xx}\Big|_{\substack{x=1\\y=-1}} = \frac{2}{e} \quad , \quad f_{xy}\Big|_{\substack{x=1\\y=-1}} = 0 \quad , \quad f_{yy}\Big|_{\substack{x=1\\y=-1}} = \frac{2}{e}$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = \frac{4}{e^2} > 0 \quad , \quad f_{xx} > 0 \quad => \quad \left(-1 \; ,1 \; ,-\frac{1}{e}\right) \; \textit{minimum}$$

$\left(-1 \; ,-1 \; ,\frac{1}{e}\right)$ ***suspected***

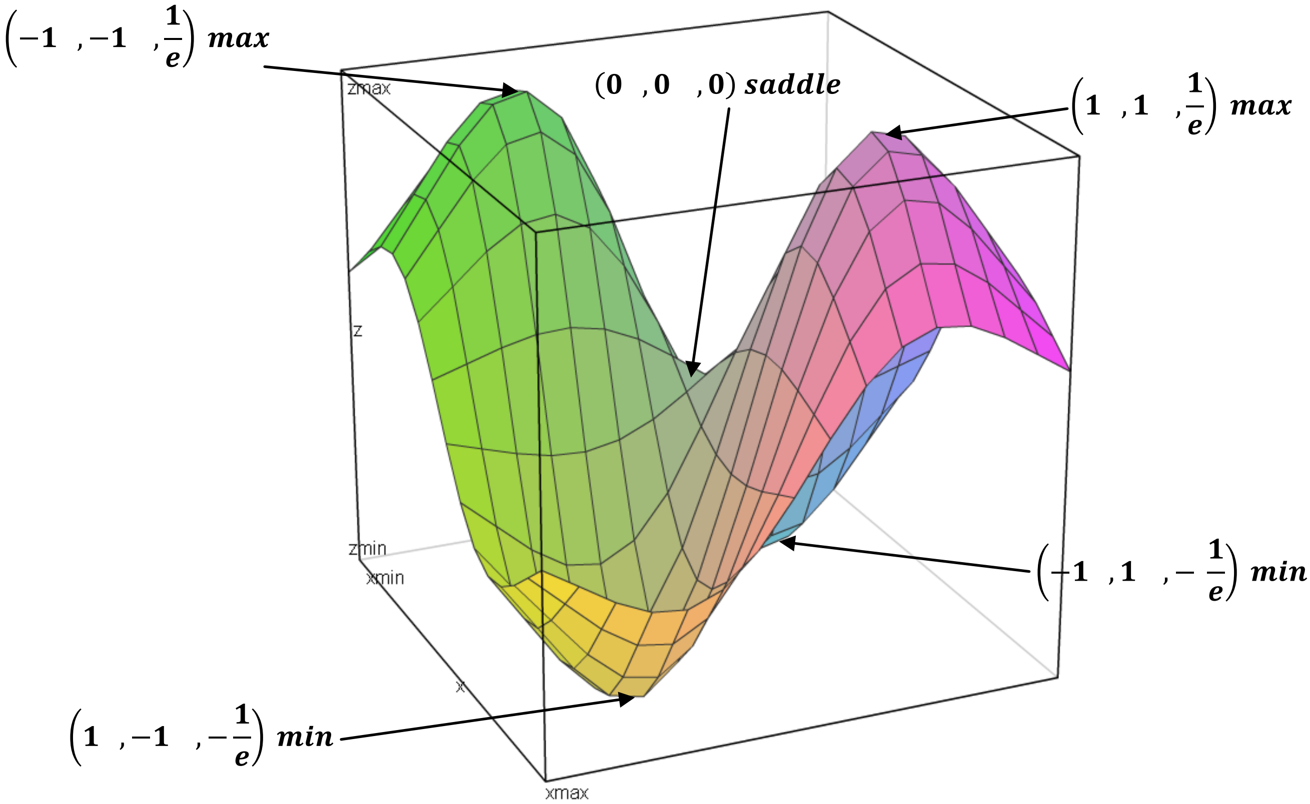
$$f_{xx}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = -\frac{2}{e} \quad , \quad f_{xy}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 0 \quad , \quad f_{yy}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = -\frac{2}{e}$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = \frac{4}{e^2} > 0 \quad , \quad f_{xx} < 0 \quad => \quad \left(-1 \; ,-1 \; ,\frac{1}{e}\right) \; \textit{maximum}$$

$(0 \; ,0 \; ,0)$ ***suspected***

$$f_{xx}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0 \quad , \quad f_{xy}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1 \quad , \quad f_{yy}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = -1 < 0 \quad => \quad (0 \; ,0 \; ,0) \; \textit{saddle}$$


$\left(-1, -1, \frac{1}{e}\right)$ max
$(0, 0, 0)$ saddle
$\left(1, 1, \frac{1}{e}\right)$ max
$\left(-1, 1, -\frac{1}{e}\right)$ min
$\left(1, -1, -\frac{1}{e}\right)$ min
zmax
z
zmin
xmin
x
xmax