מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x,y)=xe^{-x^3+y^3}$.

ואת אופייה.

תשובות:

(,)

(ניתן להכניס את המילה מינימום/מקסימום/אוכף)

תיאורמה 11 – מבחן הנגזרת השנייה לערכי קיצון מקומיים

נניח ש- $f_{(x,y)}$ ונגזרותיה החלקיות הראשונות והשניות רציפות על פני דסקה פתוחה שמרכזה (a,b), וש- $f_{x(a,b)}=f_{y(a,b)}=0$. או אז,

1) **ל- f יש מקסימום מקומי ב- (a,b) אם $f_{xx}<0$ ו- $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2>0$ ב- (a,b) .**
2) **ל- f יש מינימום מקומי ב- (a,b) אם $f_{xx}>0$ ו- $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2>0$ ב- (a,b) .**
3) **ל- f יש נקודת אוכף ב- (a,b) אם $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2<0$ ב- (a,b) .**
4) **המבחן אינו חד משמעי ב- (a,b) אם $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2=0$ ב- (a,b) .**

$$f_{(x,y)}=xe^{-x^3+y^3}$$

$$\begin{cases} f_x = e^{-x^3+y^3}-3x^2xe^{-x^3+y^3} = (1-3x^3)e^{-x^3+y^3} \\ f_y = x(3y^2)e^{-x^3+y^3} = 3xy^2e^{-x^3+y^3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x=(1-3x^3)e^{-x^3+y^3}=0 \quad => \quad 1-3x^3=0 \quad => \quad x=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}=3^{-1/3} \\ f_y=3xy^2e^{-x^3+y^3}=0 \quad => \quad 3xy^2=0 \end{cases} \quad => \quad y=0$$

$$f_{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\ ,\ 0\right)}=3^{-1/3}e^{-1/3}=\frac{1}{\sqrt[3]{3e}} \quad => \quad \left(\sqrt[3]{1/3}\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{\sqrt[3]{3e}}\right)\ suspected$$

$$f_x=(1-3x^3)e^{-x^3+y^3} \quad => \quad \begin{cases} f_{xx} = -9x^2e^{-x^3+y^3}-3x^2(1-3x^3)e^{-x^3+y^3} = -3x^2(4-3x^3)e^{-x^3+y^3} \\ f_{xy} = 3y^2(1-3x^3)e^{-x^3+y^3} \end{cases}$$

$$f_y = 3xy^2e^{-x^3+y^3} \quad => \quad f_{yy} = 3x(\cdot 2ye^{-x^3+y^3}+3y^4e^{-x^3+y^3}) = 3xy(2+3y^3)e^{-x^3+y^3}$$

$$f_{xx}\Big|_{\substack{x=\sqrt[3]{1/3}\\ y=0}}=\frac{-9}{\sqrt[3]{9}e^{1/3}} \quad , \quad f_{xy}\Big|_{\substack{x=\sqrt[3]{1/3}\\ y=0}}=0 \quad , \quad f_{yy}\Big|_{\substack{x=\sqrt[3]{1/3}\\ y=0}}=0$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2=0 \quad => \quad inconclusive$$

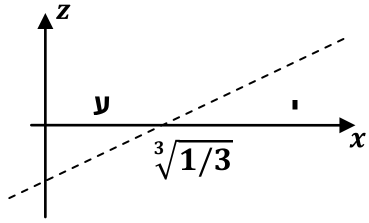
יש לברר מה קורה בסביבתה הקרובה של הנקודה החשודה. $f_{(x,y)} = xe^{-x^3+y^3}$

אפשר להשתמש בדיפרנציאל השלם, או בשיטה אחרת המודגמת להלן:

נבדוק אם במישור $y = 0$ (מישור xz) יש פיתול בנקודה החשודה $\left(\sqrt[3]{1/3}\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{\sqrt[3]{3e}}\right)$. אם אכן כך – אוכף!

$$f_{(x,0)} = xe^{-x^3}$$

$$f_{x(x,0)} = (1-3x^3)e^{-x^3} \overset{\text{ע}}{>} 0 \quad => \quad 3x^3 - 1 \overset{\text{ע}}{<} 0 \quad => \quad \sqrt[3]{3}x - 1 \overset{\text{ע}}{<} 0 \quad =>$$

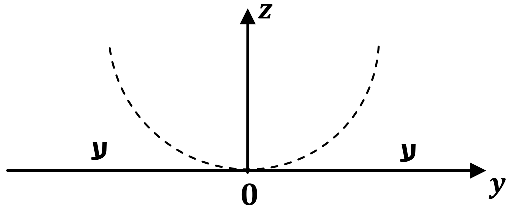


במישור $y = 0$ קיבלנו <u>מקסימום</u> בנקודה החשודה - הפונקציה עוברת בה מעליה לירידה. חבל שלא פיתול!

אין מנוס מלחזור על התהליך במישור $x = \sqrt[3]{1/3}$ (המקביל למישור yz), מתוך תקווה **שכאן** יתקבל פיתול:

$$f_{\left(\sqrt[3]{1/3}\ ,\ y\right)} = \sqrt[3]{1/3}e^{-\frac{1}{3}+y^3}$$

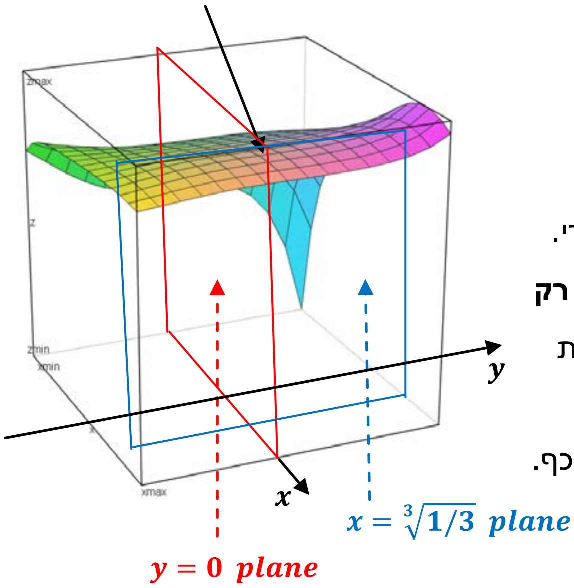
$$f_{y\left(\sqrt[3]{1/3}\ ,\ y\right)} = 3\sqrt[3]{1/3}y^2e^{-\frac{1}{3}+y^3} \overset{\text{ע}}{>} 0 \quad => \quad y^2 \overset{\text{ע}}{>} 0 \quad =>$$



במישור $x = \sqrt[3]{1/3}$ קיבלנו <u>פיתול אגרסיבי</u> בנקודה החשודה - הפונקציה עוברת בה מעליה לעליה.

אם כך, בנקודה החשודה ישנו <u>אוכף</u>.

$\left(\sqrt[3]{1/3}\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{\sqrt[3]{3e}}\right)$ *saddle*



אם גם במישור $x = \sqrt[3]{1/3}$ היינו מקבלים מקסימום בנקודה החשודה,

האם זה היה אומר שהיא נקודת מקסימום?

לא, עלינו לחזור על התהליך אינסוף פעמים – באינסוף המישורים המאונכים למישור xy, ולוודא שבכולם מתקבל מקסימום. בלתי אפשרי.

אם כך, השיטה הנ"ל (כמו גם שיטת הדיפרנציאל השלם של z) טובה **רק** להוכחת אוכף. כדי להוכיח מקסימום/מינימום (כאשר $\Delta = 0$), יש לפנות לשיטות אחרות החורגות ממסגרת הקורס.

אם כך, בכל פעם שניתקל בקורס ב- $\Delta = 0$, נדע מראש שמדובר באוכף.

חחחחחחחח גדול אבל צריך להוכיח!