מישורים משיקים

בפרק זה נגדיר מישור אשר משיק למשטח חלק שבמרחב xyz. נמצא את המשוואה של מישור כזה באמצעות הנגזרות החלקיות של פונקצית המשטח. הדבר דומה למציאת משוואת המשיק לעקום במישור xy , עבור פונקציה של משתנה יחיד.

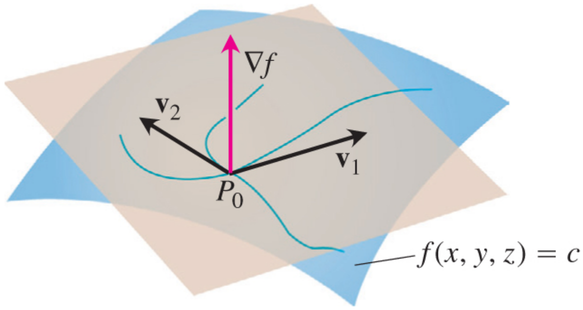
מישורים משיקים וישרים נורמאלים.

אם $\vec{r}=g_{(t)}i+h_{(t)}j+k_{(t)}k$ הינו עקום חלק על פני משטח $f_{(x,y,z)}=c$ של פונקציה גזירה f , אז $f_{[g_{(t)},h_{(t)},k_{(t)}]}=c$.

גזירת שני אגפי המשוואה לפי t מניבה

$$\frac{d}{dt}f_{[g_{(t)},h_{(t)},k_{(t)}]}=\frac{d}{dt}(c) \quad => \quad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dk}{dt}=0 \quad =>$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j+\frac{\partial f}{\partial z}k\right)}_{\vec{\nabla} f}\cdot\underbrace{\left(\frac{dg}{dt}i+\frac{dh}{dt}j+\frac{dk}{dt}k\right)}_{\frac{d\vec{r}}{dt}}=0$$



בכל נקודה לאורך העקום, $\vec{\nabla} f$ מאונך לווקטור המהירות של העקום. נתמקד בעקומים אשר עוברים דרך P_0 .
כל ווקטורי המהירות ב- P_0 מאונכים ל- $\vec{\nabla} f$ ב- P_0, כך שהמשיקים לעקומים נמצאים כולם במישור העובר ב- P_0 ומאונך ל- $\vec{\nabla} f$.
מישור זה נקרא **המישור המשיק למשטח ב-** P_0 , והישר דרך P_0 אשר מאונך לו נקרא **הישר הנורמאלי למשטח ב-** P_0 .

<u>הגדרות</u>: מישור משיק, ישר נורמאלי

המישור המשיק בנקודה $P_0(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ למשטח רמה $f_{(x,y,z)}=c$ של פונקציה גזירה f הוא המישור דרך P_0 אשר מאונך ל- $(\vec{\nabla} f)_{P_0}$.

הישר הנורמאלי למשטח ב- P_0 הוא הישר העובר דרך P_0 ומקביל ל- $(\vec{\nabla} f)_{P_0}$.

אם כך, למישור המשיק ולישר הנורמאלי מתאימות המשוואות הבאות:

מישור משיק ל- $f_{(x,y,z)}=c$ בנקודה $P_0(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$

$$f_{x(P_0)}(x-x_0)+f_{y(P_0)}(y-y_0)+f_{z(P_0)}(z-z_0)=0$$

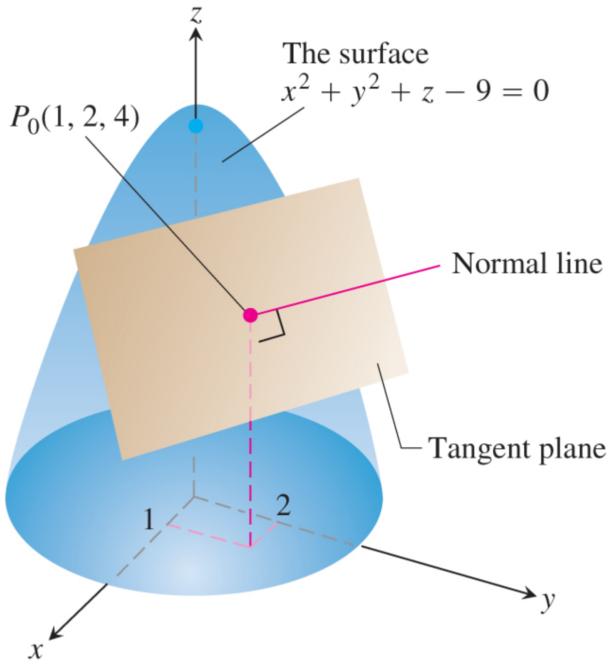
ישר נורמאלי ל- $f_{(x,y,z)}=c$ בנקודה $P_0(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$

$$x=x_0+f_{x(P_0)}t \quad , \quad y=y_0+f_{y(P_0)}t \quad , \quad z=z_0+f_{z(P_0)}t$$

דוגמה מהספר (עמ' 1016) – מציאת המישור המשיק והישר הנורמאלי.

מצא את המישור המשיק והישר הנורמאלי למשטח $f_{(x.y.z)} = x^2 + y^2 + z - 9 = 0$ בנקודה $P_0(1\,,2\,,4)$.

פיתרון:



המישור המשיק עובר דרך P_0 ומאונך לגרדיינט של f ב- P_0 .

הגרדיינט הינו

$$(\vec{\nabla} f)_{P_0} = (2xi + 2yj + k)_{(1,2,3)} = 2i + 4j + k$$

המישור המשיק הוא אם כך

$$2(x-1) + 4(y-2) + (z-4) = 0$$

או בצורה מפורשת $2x + 4y + z = 14$.

הישר הנורמאלי למשטח ב- P_0 הינו

$$x = 1 + 2t \;\; , y = 2 + 4t \;\; , \;\; z = 4 + t$$

כדי למצוא את משוואת המישור אשר משיק למשטח חלק בנקודה $P_0(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$, היכן ש- $z_0 = f_{(x_0,y_0)}$, נבין קודם כל שהמשוואה $z = f_{(x,y)}$ שקולה למשוואה $f_{(x,y)} - z = 0$.

המשטח $z = f_{(x,y)}$ מהווה לכן "משטח רמה 0 " של הפונקציה $F_{(x,y,z)} = f_{(x,y)} - z$. הנגזרות החלקיות של F הן

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(f_{(x,y)} - z\right) = f_x - 0 = f_x$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(f_{(x,y)} - z\right) = f_y - 0 = f_y$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(f_{(x,y)} - z\right) = 0 - 1 = -1$$

הנוסחה למישור המשיק למשטח הרמה בנקודה P_0 ,

$$F_{x(P_0)}(x - x_0) + F_{y(P_0)}(y - y_0) + F_{z(P_0)}(z - z_0) = 0$$

מצטמצמת לכן לנוסחה

$$f_{x(x_0,y_0)}(x - x_0) + f_{y(x_0,y_0)}(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

מישור משיק למשטח $z = f_{(x,y)}$ ב- $\left(x_0\,,\,y_0\,,f_{(x_0,y_0)}\right)$

המישור המשיק למשטח $z = f_{(x,y)}$ של פונקציה גזירה f בנקודה $\left(x_0\,,\,y_0\,,f_{(x_0,y_0)}\right) = P_0(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ הינו :

$$f_{x(x_0,y_0)}(x - x_0) + f_{y(x_0,y_0)}(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

דוגמה מהספר (עמ' 1016) – מציאת מישור משיק למשטח $z = f_{(x,y)}$

מצא את המישור המשיק למשטח $z = x\cos y - ye^x$ **ב-** $(0,0,0)$.

פיתרון:

ראשית נחשב את הנגזרות החלקיות של $f_{(x,y)} = x\cos y - ye^x$

$$f_{x(0,0)} = (\cos y - ye^x)_{(0,0)} = 1 - 0 = 1 \quad , \quad f_{y(0,0)} = (-x\sin y - e^x)_{(0,0)} = 0 - 1 = -1$$

המישור המשיק הוא לכן

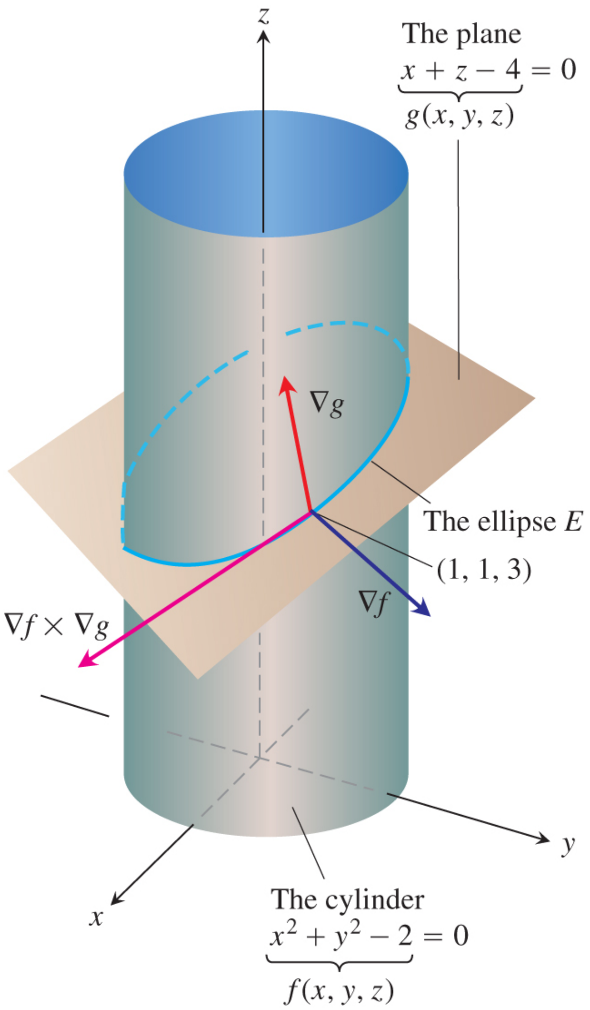
$$1 \cdot (x-0) - 1 \cdot (y-0) - (z-0) = 0 \quad => \quad x - y - z = 0$$

דוגמה מהספר (עמ' 1017) – משיק לעקום החיתוך של שני משטחים

החיתוך בין המשטחים $f_{(x,y,z)} = x^2 + y^2 - 2 = 0$ (גליל) ו- $g_{(x,y,z)} = x + z - 4 = 0$ (מישור) מתווה אליפסה E .

מצא משוואות פרמטריות למשיק ל- E בנקודה $P_0(1,1,3)$.

פיתרון:



המשיק מאונך גם ל- $\vec{\nabla} f$ וגם ל- $\vec{\nabla} g$,

ולכן מקביל ל- $\vec{v} = \vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g$.

$$(\vec{\nabla} f)_{(1,1,3)} = (2xi + 2yj)_{(1,1,3)} = 2i + 2j$$

$$(\vec{\nabla} g)_{(1,1,3)} = (i + k)_{(1,1,3)} = i + k$$

$$\vec{v} = (2i + 2j) \times (i + k) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2i - 2j - 2k$$

המשיק הוא אם כך

$$x = 1 + 2t \qquad y = 1 - 2t \qquad z = 3 - 2t$$

הערכת השינוי בכיוון מסוים

כשאנו שואלים עד כמה משתנה ערכה של פונקציה f עקב תזוזה קטנה ds מנקודה P_0 לנקודה סמוכה, ממלאת הנגזרת הכיוונית תפקיד דומה לזה שממלאת הנגזרת הרגילה. כש- f הינה פונקציה של משתנה יחיד, מתקבל כידוע $df = f'_{(P_0)}ds$.

עבור פונקציה של שני משתנים או יותר, אנו משתמשים בנוסחה $df = \left[\left(\vec{\nabla} f\right)_{(P_0)} \cdot \hat{u}\right] ds$, כאשר $\hat{u}$ הוא כיוון התזוזה מ- P_0.

הערכת השינוי ב- f בכיוון $\hat{u}$

לשם הערכת השינוי בערכה של פונקציה גזירה f עקב תזוזה קטנה ds מנקודה P_0 בכיוון מסוים $\hat{u}$, נשתמש בנוסחה

$$df = \left[\left(\vec{\nabla} f\right)_{(P_0)} \cdot \hat{u}\right] ds$$

דוגמה מהספר – הערכת שינוי הערך של $f_{(x,y,z)}$.

הערך כמה ישתנה ערכה של $f_{(x,y,z)} = y \sin x + 2yz$ אם נזוז 0.1 יחידות מ- $P_0(0,1,0)$ בכיוון $P_1(2,2,-2)$.

פיתרון: ראשית נמצא את הנגזרת של f ב- P_0 בכיוון הווקטור $\overrightarrow{P_0P_1} = 2i + j - 2k$. כוונו של ווקטור זה הינו

$$\hat{u} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{3} = \frac{2}{3}i + \frac{1}{3}\mathrm{j} - \frac{2}{3}\mathrm{k}$$

הגרדיינט של f ב- P_0 הוא

$$\left(\vec{\nabla} f\right)_{(0,1,0)} = [(y \cos x)i + (\sin x + 2z)j + (2y)k]_{(0,1,0)} = i + 2k$$

ולכן הנגזרת בכיוון $\hat{u}$ ב- P_0 הינה

$$\left(\vec{\nabla} f\right)_{(P_0)} \cdot \hat{u} = (i + 2k) \cdot \left(\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}\mathrm{j} - \frac{2}{3}\mathrm{k}\right) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$$

השינוי df בערכה של f עקב תזוזה בת $ds = 0.1$ יחידות מ- P_0 בכיוון $\hat{u}$, הינו בערך

$$df = \left[\left(\vec{\nabla} f\right)_{(P_0)} \cdot \hat{u}\right] ds = \left(-\frac{2}{3}\right)(0.1) = -\frac{1}{15}\ units$$

<u>כיצד עושים ליניאריזציה לפונקציה של שני משתנים</u>

פונקציות של שני משתנים עלולות להיות מסובכות, ולפעמים כדאי להחליפן בפשוטות יותר אשר תספקנה תוצאות קרובות מספיק. הדבר נעשה באופן דומה לזה שבו מוצאים תחליפים ליניאריים לפונקציות של משתנה יחיד.

נניח שהפונקציה אותה רוצים להחליף היא $z = f_{(x,y)}$, ושעל התחליף להיות אפקטיבי בקרבת נקודה $(x_0\ ,\ y_0)$ שבה f גזירה וידועים ערכיהם של f , f_x , ו- f_y . אם זזים מ- $(x_0\ ,\ y_0)$ לנקודה אחרת $(x\ ,y)$ באמצעות התוספות $\Delta x = x - x_0$ ו- $\Delta y = y - y_0$, אז ההגדרה לגזירות נותנת

$$f_{(x,y)} - f_{(x_0\ ,y_0)} \ = \ f_{x(x_0\ ,y_0)} \cdot \Delta x \ + \ f_{y(x_0\ ,y_0)} \cdot \Delta y \ + \ \varepsilon_1 \cdot \Delta x \ + \ \varepsilon_2 \cdot \Delta y$$

תוך שמתקיים $\varepsilon_1, \varepsilon_1 \to 0$ כאשר $\Delta x, \Delta y \to 0$.

אם התוספות Δx ו- Δy הן קטנות, המכפלות $\varepsilon_1 \cdot \Delta x$ ו- $\varepsilon_2 \cdot \Delta y$ קטנות אף יותר ונקבל

$$f_{(x,y)} \ \approx \ f_{(x_0\ ,y_0)} + f_{x(x_0\ ,y_0)} \cdot (x - x_0) \ + \ f_{y(x_0\ ,y_0)} \cdot (y - y_0)$$

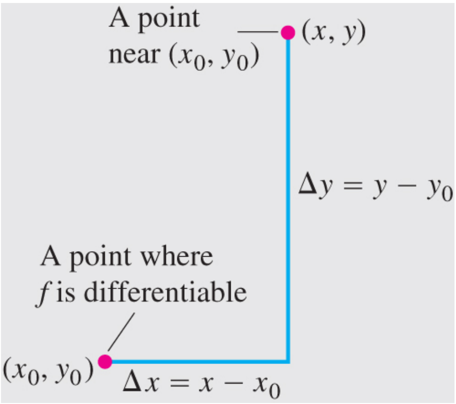
במילים אחרות, כל עוד Δx ו- Δy הן קטנות, ניתן להחליף את f בפונקציה ליניארית L מבלי שההבדל יהיה משמעותי. אם f מסובכת לשימוש ואנו מוכנים "לספוג" את אי הדיוק, נשתמש ב- L ונקבל תוצאה מקורבת.

<u>הגדרות</u>: ליניאריזאציה, קירוב ליניארי סטנדרטי

ה**ליניאריזאציה** של $f_{(x,y)}$ בנקודה $(x_0\ ,\ y_0)$ שבה f גזירה, היא הפונקציה

$$L_{(x,y)} = f_{(x_0\ ,y_0)} + f_{x(x_0\ ,y_0)} \cdot (x - x_0) \ + \ f_{y(x_0\ ,y_0)} \cdot (y - y_0)$$

הקירוב $f_{(x,y)} \approx L_{(x,y)}$ הינו **הקירוב הליניארי הסטנדרטי** של f ב- $(x_0\ ,\ y_0)$.



אנו רואים שליניאריזאציה של פונקציה בת שני משתנים היא למעשה קירוב **מישורי** אשר משיק למשטח הפונקציה, ממש כשם שליניאריזאציה של פונקציה בת משתנה יחיד היא קירוב בצורת **ישר** אשר משיק לגרף הפונקציה.

דוגמה מהספר (עמ' 1019) – מציאת ליניאריזאציה

מצא את הליניאריזאציה של $f_{(x,y)} = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$ **בנקודה** $(3\ ,2)$.

פיתרון: ראשית נחשב את f , f_x ו- f_y בנקודה $(x_0\ ,\ y_0) = (3\ ,2)$:

$$f_{(3,2)} = \left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3\ ,2)} = 9 - 6 + 2 + 3 = 8$$

$$f_{x(3,2)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3\ ,2)} = (2x - y)_{(3\ ,2)} = 4$$

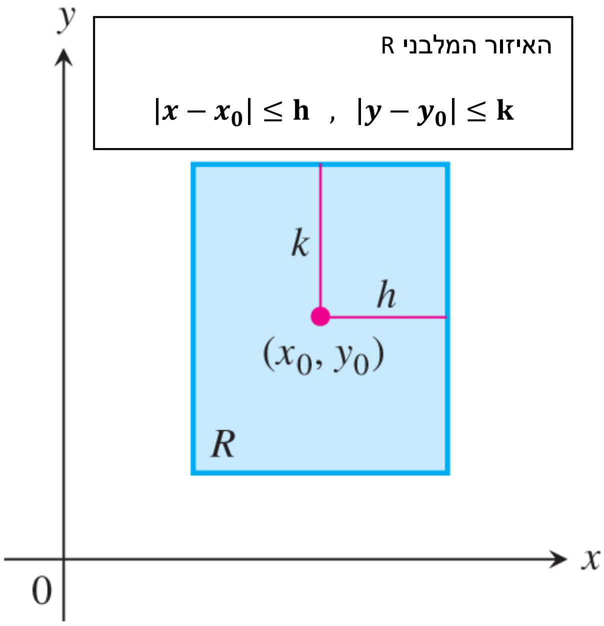
$$f_{y(3,2)} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3\ ,2)} = (-x + y)_{(3\ ,2)} = -1$$

$$L_{(x,y)} = 4x - y - 2$$

הליניאריזאציה של f ב- $(3\ ,2)$ היא אם כן

$$L_{(x,y)} = 4x - y - 2$$

כאשר מבצעים קירוב לפונקציה גזירה $f_{(x,y)}$ ע"י ליניאריזאציה $L_{(x,y)}$ ב- $(x_0\ ,\ y_0)$, עולה השאלה עד כמה הקירוב מדויק.
אם נמצא חסם עליון **M** עבור $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$ ו- $|f_{xy}|$ בתוך מלבן **R** שמרכזו $(x_0\ ,\ y_0)$, נוכל לתחום את השגיאה **E** על פני **R**
באמצעות נוסחה פשוטה. השגיאה מוגדרת כ- $E_{(x,y)} = f_{(x,y)} - L_{(x,y)}$.



השגיאה שבקירוב הליניארי הסטנדרטי

אם ל- $f_{(x,y)}$ ישנן נגזרות ראשונה ושנייה והן רציפות על פני מלבן **R** שמרכזו $(x_0\ ,\ y_0)$, ואם **M** מהווה חסם עליון כלשהו לערכיהן של $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$ ו- $|f_{xy}|$ על פני **R**, אז השגיאה המתקבלת מהחלפתה של $f_{(x,y)}$ (על פני **R**) בליניאריזאציה שלה

$$L_{(x,y)} = f_{(x_0,y_0)} + f_{x(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) + f_{y(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0)$$

מקיימת את אי השוויון

$$|E_{(x,y)}| \le \frac{1}{2}\mathrm{M}(|x - x_0| + |y - y_0|)^2$$

כדי להקטין את $|E_{(x,y)}|$ עבור M נתון, עלינו להקטין את $|x - x_0|$ ואת $|y - y_0|$.

דוגמה מהספר (עמ' 1020) – הגבלת השגיאה בדוגמה לליניאריזאציה שניתנה בסוף העמוד הקודם.
במסגרת הקירוב $f_{(x,y)} \approx L_{(x,y)}$ אשר בוצע בדוגמה הנדונה, מצא את החסם העליון לשגיאה על פני המלבן

$$R: \quad |x - 3| \le 0.1 \quad , \quad |y - 2| \le 0.1$$

בטא חסם זה באחוזים מתוך $f_{(3,2)}$ - ערכה של הפונקציה במרכז המלבן.

פיתרון: נשתמש באי השוויון $|E_{(x,y)}| \le \frac{1}{2}\mathrm{M}(|x - x_0| + |y - y_0|)^2$.
כדי למצוא ערך מתאים ל- M, נחשב את $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$ ו- $|f_{xy}|$ ונגלה שהם קבועים:

$$|f_{xx}| = |2| = 2 \quad , \quad |f_{xy}| = |-1| = 1 \quad , \quad |f_{yy}| = |1| = 1$$

הגדול שבהם הוא **2** , כך שאפשר לקחת $M = 2$ ללא חשש.
עם $(x_0\ ,\ y_0) = (3\ ,2)$ אנו יודעים כי על פני **R**

$$|E_{(x,y)}| \le \frac{1}{2} \cdot 2(|x - 3| + |y - 2|)^2 = (|x - 3| + |y - 2|)^2$$

ומאחר שמתקיים $|y - 2| \le 0.1$ ו- $|x - 3| \le 0.1$, מתקבל

$$|E_{(x,y)}| \le (0.1 + 0.1)^2 = 0.04$$

באחוזים מתוך $f_{(3,2)} = 8$, השגיאה אינה עולה על $\frac{0.04}{8} \cdot 100 = 0.5\%$.