1) שיטות אינטגרציה, אינטגרלים לא אמיתיים:

א)

$$\int tg(x)dx = \int \frac{sinx}{cosx}dx \Rightarrow \begin{cases} u = cosx \\ du = -sinxdx \end{cases} = -\int \frac{du}{u} = -ln|u| = -ln|cosx| + c$$

ב) האם $\int_0^{\pi/2} \mathrm{tg(x)dx}$ מתכנס? אם כן, מהו ערכו?

$$\int_0^{\pi/2} tg(x)dx = -\int_1^0 \frac{du}{u} = \int_0^1 \frac{du}{u} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{du}{u} = \lim_{a\to 0^+} [lnu\Big|_a^1 = \lim_{a\to 0^+} ln\frac{1}{a} = \infty$$

מתבדר!

ג) האם $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-0.5\pi+\varepsilon}^{0.5\pi-\epsilon} tg(x)dx$ מתכנס? אם כן, מהו ערכו?

$tg(x)$ היא פונקציה אי-זוגית, ובשל סימטרית האינטגרציה סביב $x = 0$ נקבל שהאינטגרל הנתון מתכנס ל- **0**.

2) טורים אינסופיים

א) פתח לטור מקלורן את $f_{(x)} = \frac{1}{x+a}$ $(0 < a)$. מהו תחום ההתכנסות?

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \cdots$$

$$f_{(x)} = (x+a)^{-1} \quad \Rightarrow \quad f_{(0)} = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$f'_{(x)} = -(x+a)^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'_{(0)} = -a^{-2} = -\frac{1}{a^2}$$

$$f''_{(x)} = 2!\,(x+a)^{-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{f''_{(0)}}{2!} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

$$f'''_{(x)} = -3!\,(x+a)^{-4} \quad \Rightarrow \quad \frac{f'''_{(0)}}{3!} = -a^{-4} = -\frac{1}{a^4}$$

.

.

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot (x+a)^{-(n+1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \cdot a^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}$$

$$\frac{1}{x+a} = \frac{1/a}{1+x/a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^{k+1}} \cdot x^k = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a^3}x^2 - \frac{1}{a^4}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \cdot x^n + \cdots$$

טור הנדסי , $a_1 = \frac{1}{a}$, $q = -\frac{x}{a}$. מתכנס באופן מוחלט עבור $\left|-\frac{x}{a}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x}{a} < 1 \Rightarrow -a < x < a$

ב) פתח לטור מקלורן את $g_{(x)} = \frac{1}{(x+a)(x+b)}$. $(0 < a < b)$. מהו תחום ההתכנסות?

$$g_{(x)} = \frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} = \frac{A(x+b)+B(x+a)}{(x+a)(x+b)} = \frac{(A+B)x+(Ab+Ba)}{(x+a)(x+b)}$$

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{(A+B)x+(Ab+Ba)}{(x+a)(x+b)} => \begin{cases} A+B=0 \quad => \quad B=-A \quad , \quad B=-\frac{1}{b-a} \\ Ab+Ba=1 \quad => \quad Ab-Aa=1 \quad => \quad A=\frac{1}{b-a} \end{cases}$$

$$g_{(x)} = \frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} = \frac{\frac{1}{b-a}}{x+a} - \frac{\frac{1}{b-a}}{x+b} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right)$$

<u>מכאן ואילך נשתמש בתובנות מסעיף א'</u>

$$g_{(x)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right) = \frac{1}{b-a}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^{k+1}} \cdot x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{b^{k+1}} \cdot x^k\right)$$

$$g_{(x)} = \frac{1}{b-a}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^{k+1}} \cdot x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{b^{k+1}} \cdot x^k\right) = \frac{1}{b-a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{a^{k+1}} - \frac{1}{b^{k+1}}\right) x^k$$

תחום ההתכנסות ייקבע ע"פ התנאי המחמיר יותר מבין שני התנאים $-a < x < a$ ו- $-b < x < b$.

במילים אחרות, תוצאת החיתוך של שני התנאים הנ"ל : $-b < x < b \quad \cap \quad -a < x < a$

שהינה: $-a < x < a$.

3) גראדיינט, מישור משיק

נתון המשטח $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$

א) מצא את הגרדיאנט בנקודה (p,q,r) על המשטח ואת משוואת המישור המשיק בנקודה זו.

<u>פיתרון</u> :

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a} \quad => \quad f_{(x,y,z)} = \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a} = 0$$

הגרדיינט הינו:

$$(\vec{\nabla} f)_{P_0} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\hat{x}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\hat{y}+\frac{1}{2\sqrt{z}}\hat{z}\right)_{(p,q,r)} = \frac{1}{2\sqrt{p}}\hat{x}+\frac{1}{2\sqrt{q}}\hat{y}+\frac{1}{2\sqrt{r}}\hat{z}$$

מישור משיק ל- $f_{(x,y,z)}=c$ בנקודה $P_0(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$:

$$f_{x(P_0)}(x-x_0)+f_{y(P_0)}(y-y_0)+f_{z(P_0)}(z-z_0) = 0$$

המישור המשיק הוא אם כך:

$$\frac{1}{2\sqrt{p}}(x-p)+\frac{1}{2\sqrt{q}}(y-q)+\frac{1}{2\sqrt{r}}(z-r) = 0$$

או בצורה מפורשת

$$\frac{1}{2\sqrt{p}}x+\frac{1}{2\sqrt{q}}y+\frac{1}{2\sqrt{r}}z = \frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}}{2}$$

ב) המשיק חותך את ציר x בנקודה x_1 , את ציר y בנקודה y_1 ואת ציר z בנקודה z_1 .
הוכח כי סכום שלושת נקודות אלה שווה ל a.

<u>פיתרון</u> :

על ציר x מתקיים $y=z=0$:

$$\frac{1}{2\sqrt{p}}x_1+\frac{1}{2\sqrt{q}}0+\frac{1}{2\sqrt{r}}0 = \frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}}{2} \quad => \quad x_1=\sqrt{p}(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})$$

על ציר y מתקיים $x=z=0$:

$$\frac{1}{2\sqrt{p}}0+\frac{1}{2\sqrt{q}}y_1+\frac{1}{2\sqrt{r}}0 = \frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}}{2} \quad => \quad y_1=\sqrt{q}(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})$$

על ציר z מתקיים $x=y=0$:

$$\frac{1}{2\sqrt{p}}0+\frac{1}{2\sqrt{q}}0+\frac{1}{2\sqrt{r}}z_1 = \frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}}{2} \quad => \quad z_1=\sqrt{r}(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})$$

$$x_1+y_1+z_1 = \sqrt{p}(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}) + \sqrt{q}(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}) + \sqrt{r}(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}) =$$

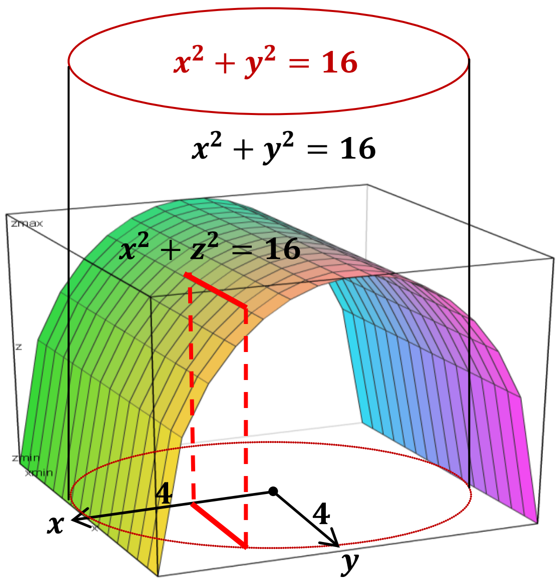
$$= (\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}) = (\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})^2 = \sqrt{a}^2 = a \quad \leftarrow \quad \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$$

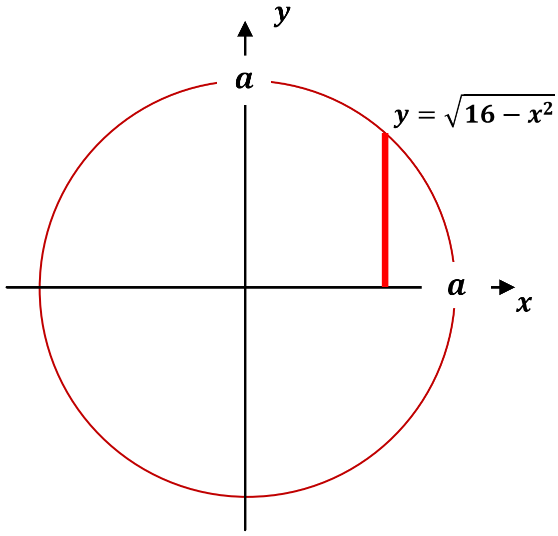
4) אינטגרלים כפולים

מצא את הנפח המשותף לגליל $x^2+y^2=16$ ולגליל $x^2+z^2=16$

כדאי לבנות "קירות" מקבילים לציר ה- y ,
כי אז צלעו העליונה של כל "קיר" מקבילה
לתחתונה (זו שמצוירת באדום).
האינטגרציה אז פשוטה יותר.

מצויר רק החלק שמעל מישור xy ,
ז"א רק חצי מהנפח המדובר.
מתוכו נחשב רק את הנפח שמעל
רביע I , ולבסוף נכפול בשמונה.





$$x^2+z^2=16 \quad => \quad f_{(x,y)}=z=\sqrt{16-x^2} \quad \leftarrow \quad \textit{the roof}$$

$$\iint_R f_{(x,y)}\,dA = \int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\sqrt{16-x^2}\,dydx = \int_0^4\left[y\sqrt{16-x^2}\right|_0^{\sqrt{16-x^2}}dx =$$

$$= \int_0^4\left[\sqrt{16-x^2}\sqrt{16-x^2}\,dx = \int_0^4(16-x^2)\,dx = \left[16x-\frac{x^3}{3}\right|_0^4 = 64-\frac{64}{3} = \frac{2}{3}\cdot 64$$

$$8\iint_R f_{(x,y)}\,dA = 8\cdot\frac{2}{3}\cdot 64 = 341\frac{1}{3}\ \textit{Cubic Units}$$