1) שיטות אינטגרציה, אינטגרלים לא אמיתיים:

א) $\int ln(ax+b)\,dx = ?$

$$\int ln(ax+b)dx \;\rightarrow\; \begin{cases} u = ln(ax+b) & => \quad du = \frac{a}{ax+b}dx \\ dv = dx & => \quad v = x \end{cases}$$

$$\int ln(ax+b)dx \quad = \quad x \cdot ln(ax+b) - \int \frac{ax}{ax+b}dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\int \frac{ax}{ax+b}dx \quad = \quad \int \frac{ax+b-b}{ax+b}dx \quad = \quad \int \left(\frac{ax+b}{ax+b} - \frac{b}{ax+b}\right)dx \quad = \\ &= \int \left(1 - \frac{b}{ax+b}\right)dx \quad = \quad x - \frac{b}{a} \cdot ln(ax+b) \end{aligned}}$$

$$\int ln(ax+b)dx \quad = \quad x \cdot ln(ax+b) - \left(x - \frac{b}{a} \cdot ln(ax+b)\right) \quad =$$

$$= x \cdot ln(ax+b) - x + \frac{b}{a} \cdot ln(ax+b) = \left(x + \frac{b}{a}\right) ln(ax+b) - x = \left(\frac{ax+b}{a}\right) ln(ax+b) - x$$

$$Conclusion: \quad \int ln(ax+b)dx \quad = \quad \left(\frac{ax+b}{a}\right) ln(ax+b) - x + C$$

ב) $\int ln\,(e^2 - x^2)\,dx = ?$

$$\int ln(e^2 - x^2)dx \quad = \quad \int ln(e-x)(e+x)dx \quad = \quad \int [ln(e-x) + ln(e+x)]dx \quad =$$

$$= \int ln(e-x)dx + \int ln(e+x)dx \quad = \quad \int ln(-x+e)dx + \int ln(x+e)dx \quad =$$

$$\left(\frac{-x+e}{-1}\right) ln(-x+e) - x + \left(\frac{x+e}{1}\right) ln(x+e) - x \quad = \quad (x-e)ln(e-x) + (x+e)ln(e+x) - 2x + C$$

$$Conclusion: \int ln(e^2 - x^2)dx = (x-e)ln(e-x) + (x+e)ln(e+x) - 2x + C$$

$$\boldsymbol{Note}: \quad \int ln(e^2 - x^2)dx \; = \; (x-e)ln(e-x) + \; (x+e)ln(e+x) - 2x + C$$

ג) האם $\int_{-e}^{e}[2e - ln(e^2 - x^2)]x$ מתכנס? אם כן, מהו ערכו?

האינטגרנד מתאפס כשמציבים בו את גבולות האינטגרציה, לכן זהו אינטגרל לא אמיתי מסוג II.

כמו כן, האינטגרנד הוא פונקציה זוגית. אפשר לנצל זאת ולחשב $2\int_0^e[2e - ln(e^2 - x^2)]dx$.

$$\int_{-e}^{e}[2e - ln(e^2 - x^2)]dx \; = \; \lim_{\substack{b\to e^-\\ a\to -e^+}} \int_a^b [2e - ln(e^2 - x^2)]dx \; = \; 2\lim_{b\to e^-}\int_0^b [2e - ln(e^2 - x^2)]dx$$

$$= \; 2\lim_{b\to e^-}[2e\cdot x - (x-e)ln(e-x) - \; (x+e)ln(e+x) + 2x\Big|_0^b \; =$$

$$= \; 2\lim_{b\to e^-}[2e\cdot b - (b-e)ln(e-b) - \; (b+e)ln(e+b) + 2b - (0)] \; =$$

$$= \; 2[2e^2 - (0^-)ln(0^+) - \; (2e)ln(2e) + 2e] \; = \; 2[2e^2 - (0^-)(-\infty) - \; (2e)ln(2e) + 2e] =$$

$$= \; 2[2e^2 - 0 - \; (2e)ln(2e) + 2e] \; \approx \; 22$$

הוכחה שהאיבר השני בסוגריים שואף לאפס:

$$\lim_{b\to e^-}[(b-e)ln(e-b)] \; = \; \lim_{b\to e^-}\left[\frac{ln(e-b)}{\frac{1}{b-e}}\right] \; = \; \lim_{b\to e^-}\left[\frac{ln(0^+)}{\frac{1}{0^-}}\right] \; = \; \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]$$

$$Lopital \; \to \; \lim_{b\to e^-}\left[\frac{-1/(e-b)}{\frac{-1}{(b-e)^2}}\right] \; = \; \lim_{b\to e^-}\left[\frac{-1/(e-b)}{\frac{-1}{(e-b)^2}}\right] \; = \; \lim_{b\to e^-}[e-b] \; = \; 0$$

2) טורים אינסופיים

א) נתונה סדרה שבב $a_n = \frac{n^p}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$. לאילו ערכי p $\sum a_n$ מתכנס ?

<u>פיתרון:</u>

$$\sum a_n = \left\{1 + \frac{2^p}{\sqrt{2}-1} + \frac{3^p}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{4^p}{2-\sqrt{3}} + \cdots + \frac{n^p}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} + \cdots\right\}$$

האם יתכן $a_n \to 0$? לכאורה לא, כי המכנה שואף לאפס כאשר $n \to \infty$.

אבל אם p שלילי, ה- "n " שבמונה יורד למכנה ואז יתכן אולי $a_n \to 0$. נבדוק זאת:

$$a_n = \frac{n^p}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} \cdot \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{n^p\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}{n-(n-1)} = n^p\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^p\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right) = n^p\left(2\sqrt{n}\right) = 2n^{p+0.5}$$

שימו לב שאם החזקה שלילית, ז"א אם $p < -0.5$, מתקיים $a_n \to 0$. זהו תנאי הכרחי להתכנסות, אך לא מספיק.

עבור $p = -1.5$ מתקבל : $\lim_{n\to\infty} a_n = 2n^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{n}$. $\sum a_n$ מקבל אופי הרמוני (מתבדר "גבולי").

עבור $p < -1.5$, $\sum a_n$ הינו "מעבר להרמוני" ולכן מתכנס.

<u>הערות</u> :

מבחן המנה אינו מועיל כאן, כי מתקבלת התוצאה 1 שמשמעה "אי ודאות":

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^{p+0.5}}{2n^{p+0.5}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{p+0.5} = (1^+)^{p+0.5} = 1$$

מבחן השורש גם הוא אינו מועיל כאן, כי הוא מניב בח"מ :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^{p+0.5}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n^{p+0.5}} = \lim_{n\to\infty} 2^{1/n} \cdot n^{(p+0.5)/n} = 1 \cdot (\infty)^0$$

ב) גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^p}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$, מימין ל- $x = 2$, מסתובב סביב ציר ה- x ויוצר גוף סיבוב.

לאילו ערכי p נפח הגוף סופי?

<u>פיתרון</u> : לפי הסעיף הקודם אפשר לרשום

$$f(x) = \frac{x^p}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} = x^p\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} f_{(x)} = \lim_{x\to\infty} x^p\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right) = x^p\left(2\sqrt{x}\right) = 2x^{p+0.5}$$

עד כאן מה שכבר ידוע לנו מהסעיף הקודם. כעת ניגש לסעיף הנוכחי :

$$V = \pi\int_2^\infty f^2 dx = \pi\left(\int_2^a f^2 dx + \int_a^\infty f^2 dx\right)$$

כדי שנפח הגוף יהיה סופי, על האינטגרל השני להיות סופי. ניקח $a \gg 2$ כדי שנוכל להניח $f_{(x)} = 2x^{p+0.5}$.

$$\int_a^\infty f^2 dx = \int_a^\infty \left(2x^{p+0.5}\right)^2 dx = 4\int_a^\infty x^{2p+1} dx$$

כדי שהאינטגרל יתכנס, על החזקה להיות קטנה מ- (-1) , ולשם כך צריך להתקיים $p < -1$.

3) נגזרת כיוונית, גראדיינט

הטמפרטורה על פני משטח אופקי נתונה ע"י הביטוי $T_{(x,y)} = xe^{y} + cos(xy)$.

נמלה נמצאת בנקודה $P(2\,,0)$.

בסעיפים א'- ג' יש לציין את הכיוונים במעלות, יחסית לכיוון החיובי של ציר ה- x .

א) באיזה כיוון עליה לנוע כדי שהטמפרטורה תגדל בקצב מרבי ?

ב) באיזה קצב משתנה הטמפרטורה כשהנמלה נעה בכיוון זה ?

ג) באיזה כיוון עליה לנוע כדי שהטמפרטורה תקטן בקצב מרבי ?

ד) באיזה קצב משתנה הטמפרטורה כשהנמלה נעה בכיוון זה?

ה) באיזה כיוון עליה לנוע כדי שהטמפרטורה לא תשתנה ?

ו) באיזה קצב משתנה הטמפרטורה כשהנמלה נעה בכיוון $\vec{A} = 3\hat{x} - 4\hat{y}$?

<u>פיתרון א'+ב'</u>: אנו נשאלים בעצם מהו כיוונו של הגרדיינט בנקודה $P(2,0)$ ומהו גודלו.

חישוב הגרדיינט של $T(x,y) = xe^{y} + cos(xy)$ ב- $P(2,0)$:

$$T_{x(2,0)} = e^{y} - ysin(xy)\Big|_{(2\,,0)} = e^{0} - 0sin(0) = 1$$

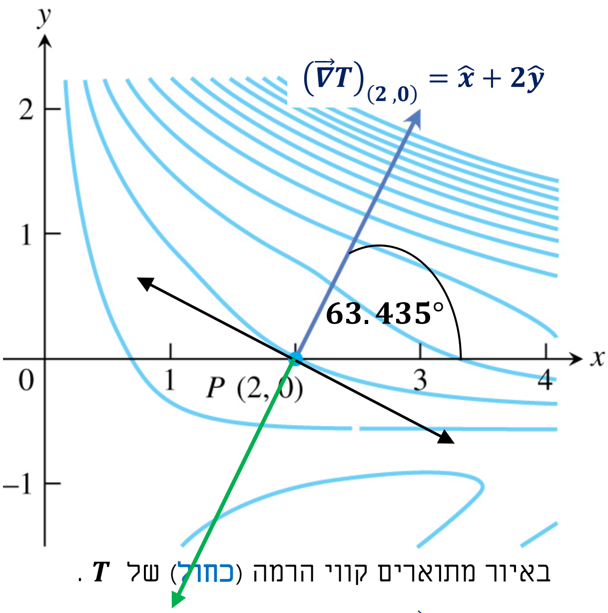
$$T_{y(2,0)} = xe^{y} - xsin(xy)\Big|_{(2\,,0)} = 2 - 2sin(0) = 2$$

הגרדיינט של T בנקודה $P(2\,,0)$ הינו :

$$\left(\vec{\nabla}T\right)_{(2\,,0)} = T_{x(2,0)}\hat{x} + T_{y(2,0)}\hat{y} = \hat{x} + 2\hat{y}$$

$$arctg2 = 63.435°$$

$$\left|\vec{\nabla}T\right|_{(2\,,0)} = \sqrt{T_{x(2,0)}{}^{2} + T_{y(2,0)}{}^{2}} = \sqrt{1^{2} + 2^{2}} = \sqrt{5}\ \ °C/cm$$



באיור מתוארים קווי הרמה (כחול) של T .
הגרדיינט $\vec{\nabla}T$ בנקודה, מאונך לקו הרמה בנקודה.
החץ הירוק שייך לסעיפים ג'+ד'.
החיצים **השחורים** שייכים לסעיף ה'.

<u>פיתרון ג'+ד'</u> : הטמפרטורה קטנה בקצב מרבי בכיוון הפוך לכיוון הגרדיינט (חץ **ירוק** באיור), ז"א $-116.565°$.

הקצב בו משתנה הטמפרטורה בכיוון זה הוא $-\left|\vec{\nabla}T\right|_{(2\,,0)} = -\sqrt{5}\ \ °C/cm$.

<u>פיתרון ה'</u>: כדי שהפונקציה (הטמפרטורה) לא תשתנה יש לנוע במאונך לגרדיינט, ז"א להוסיף או להפחית $90°$.

התשובה היא לכן $153.435°$ או $-26.565°$ (כיווני החיצים השחורים באיור - מאונכים לכיוון הגרדיינט).

פיתרון ו' :

אנו מתבקשים לחשב את הנגזרת הכיוונית בכיוון הווקטור $\vec{A} = 3\hat{x} - 4\hat{y}$.

ראשית יש לנרמל את הווקטור הנתון כך שיהפוך לווקטור כיוון (ווקטור יחידה):

$$\hat{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{5} = \frac{3}{5}\hat{x} - \frac{4}{5}\hat{y}$$

אח"כ יש לכפול את ווקטור הגרדיינט $\left(\vec{\nabla}T\right)_{(2\ ,0)}$ בווקטור הכיוון $\hat{u}$:

$$\left(\frac{dT}{ds}\right)_{\hat{u},(2\ ,0)} = \left(\vec{\nabla}T\right)_{(2\ ,0)} \cdot \hat{u} = (\hat{x} + 2\hat{y}) \cdot \left(\frac{3}{5}\hat{x} - \frac{4}{5}\hat{y}\right) = -1 \quad {}^{\circ}C/cm$$

6) מספרים מרוכבים.

א) פתור את המשוואה $z^2+(2+9i)+7i-23=0$ מצא את שני הפתרונות z_1 ו- z_2

אם נתון ש- $|z_1| > |z_2|$.

$$z^2+(2+9i)z+7i-23=0 \quad => \quad a=1 \ , \ b=2+9i \ , \ c=7i-23$$

$$\Delta = b^2-4ac = (2+9i)^2-4(7i-23) = 4+36i-81-28i+92 = 15+8i$$

$$\sqrt{\Delta} = x+yi \quad => \quad \Delta = (x+yi)^2 = x^2-y^2+2xyi = 15+8i$$

$$\begin{cases} x^2-y^2 = 15 \\ 2xy = 8 \end{cases} \quad => \quad y=\frac{4}{x} \quad => \quad x^2-\left(\frac{4}{x}\right)^2 = 15 \quad => \quad x^2-\frac{16}{x^2} = 15 \quad =>$$

$$=> \quad t-\frac{16}{t} = 15 \quad => \quad t^2-15t-16=0 \quad => \quad (t-16)(t+1)=0$$

$$=> \quad (x^2-16)(x^2+1)=0 \quad => \quad (x^2-16)=0 \quad => \quad x=\pm 4 \quad => \quad (4,1) \ , \ (-4,-1)$$

$$\sqrt{\Delta} = x+yi = \pm(4+i)$$

$$z_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-9i\pm(4+i)}{2} \quad => \quad \begin{cases} z_1 = 1-4i = \sqrt{17}CIS(-75.96°) \\ z_2 = -3-5i = \sqrt{34}CIS(-120.96°) \end{cases}$$

ב) בסדרה הנדסית נתון $a_1=\frac{z_1}{|z_1|}$ $a_2=\frac{z_2}{|z_2|}$ (אותם חישבת בסעיף א').

הסבר מדוע סכום שמונת האיברים הראשונים בסדרה הוא 0.

$$a_1=\frac{z_1}{|z_1|} = CIS(-75.96°) \quad , \quad a_2=\frac{z_2}{|z_2|} = CIS(-120.96°)$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{CIS(-120.96°)}{CIS(-75.96°)} = CIS(-45°) \quad , \quad S_8 = \frac{a_1(q^8-1)}{q-1}$$

$$(q^8-1) = CIS^8(-45°)-1 = CIS(-360°)-1 = 1-1 = 0$$