תיאורמה 11 – מבחן הנגזרת השנייה לערכי קיצון מקומיים

נניח ש- $f_{(x,y)}$ ונגזרותיה החלקיות הראשונות והשניות רציפות על פני דסקה פתוחה שמרכזה (a,b), ושּ- $f_{x(a,b)} = f_{y(a,b)} = 0$. אז,

1) ל- f יש מקסימום מקומי ב- (a,b) אם $f_{xx} < 0$ ו- $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 > 0$ ב- (a,b) .
2) ל- f יש מינימום מקומי ב- (a,b) אם $f_{xx} > 0$ ו- $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 > 0$ ב- (a,b) .
3) ל- f יש נקודת אוכף ב- (a,b) אם $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 < 0$ ב- (a,b) .
4) המבחן אינו חד משמעי ב- (a,b) אם $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = 0$ ב- (a,b) .

$$f_{(x,y)} = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$$

$$\begin{cases} f_x = 2x + y + 3 = 0 & => \quad 2x + y = -3 \\ f_y = x + 2 = 0 & => \quad x = -2 \end{cases} \quad => \quad y = 1 \quad , \quad (-2,1,3)\ \textit{suspected}$$

$$f_{xx} = 2 \quad , \quad f_{xy} = 1 \quad , \quad f_{yy} = 0 \quad => \quad f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = -1 < 0 => \quad \textit{saddle}$$