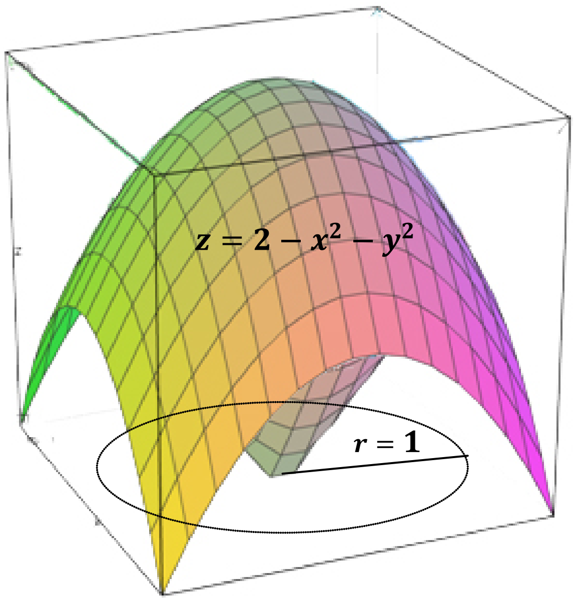
מהו הנפח הכלוא בין הפרבולואיד $z = 2 - x^2 - y^2$ והחרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$?

פיתרון :

קודקוד החרוט ב- $z = 0$ וקודקוד הפרבולואיד ב- $z = 2$.

באיזה z נחתכים החרוט והפרבולואיד ?

כדי לגלות זאת נפתור את מערכת המשוואות:



$$\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad => \quad x^2 + y^2 = 1 \quad => \quad z = 1$$

החרוט והפרבולואיד נחתכים ב- $z = 1$ בקו גובה מעגלי שרדיוסו 1.

קו הרמה המתאים (על מישור xy) הוא המעגל $x^2 + y^2 = 1$

רדיוסו של כל קו גובה אחר הינו קטן מ- 1, ובהתאם גם זה של כל קו רמה אחר. **הרדיוס המרבי של קו רמה הוא 1 אם כך.**

נפחית את החרוט מהפרבולואיד:

$$2 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2} \;=\; 2 - (x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + y^2}$$

קיבלנו ביטוי לאורכו של אלמנט. נכפול בשטח החתך הריבועי שלו $dxdy$, ונקבל את נפחו של האלמנט:

$$dV = \left[2 - (x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + y^2}\right] dxdy$$

$$V = \iint_R \left[2 - (x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + y^2}\right] dxdy \quad \rightarrow \quad V = \iint_S (2 - r^2 - r)\, r \cdot dr \cdot d\alpha$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r - r^3 - r^2) dr d\alpha \;=\; \int_0^{2\pi} \left(r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^1 d\alpha \;=\; \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) d\alpha \;=$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{12}\right) d\alpha \;=\; \frac{5}{12} \int_0^{2\pi} d\alpha \;=\; \frac{5}{12} \alpha \Big|_0^{2\pi} \;=\; \frac{5\pi}{6} \;\; \textit{Cubic Units}$$

פתרון מערכת המשוואות (למתעניינים):

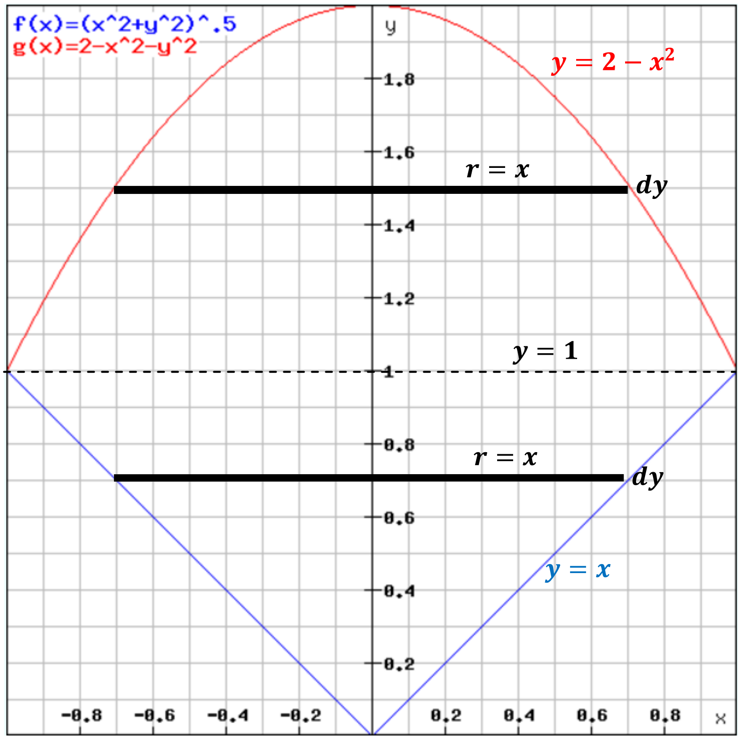
$$\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad => \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 2 - (x^2 + y^2) \quad , \quad t = x^2 + y^2 \quad => \quad \sqrt{t} = 2 - t \quad =>$$

$$=> \quad t = 4 - 4t + t^2 \quad => \quad t^2 - 5t + 4 = 0 \quad => \quad (t - 4)(t - 1) = 0 \quad => \quad x^2 + y^2 = 1$$

$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1} = 1$. הפיתרון $x^2 + y^2 = 4$ אינו אפשרי בנסיבות הבעיה ולכן נפסל.

<u>בעמוד הבא - פיתרון הבעיה באמצעות טכנולוגיה ישנה של חדו"א 1</u>

<u>פיתרון באמצעות נפח גוף סיבוב</u>



בשיטת הדיסקות:

נסובב את הפרבולה $y = 2 - x^2$ סביב ציר ה- y

ונקבל את הפרבולואיד העליון.

שטחה של דיסקה הוא $A = \pi x^2 = \pi(2 - y)$

עובייה של דיסקה הוא dy

נפחה של דיסקה הוא $dV = \pi(2 - y)dy$

נסובב גם את הישר $y = x$ סביב ציר ה- y

ונקבל את החרוט ההפוך.

שטחה של דיסקה הוא $A = \pi x^2 = \pi y^2$

עובייה של דיסקה הוא dy

נפחה של דיסקה הוא $dV = \pi y^2 dy$

$$dV = \pi x^2 dy = \pi(2 - y)dy$$

$$V_{TOP} = \pi \int_1^2 (2 - y)\, dy = \pi\left(2y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \pi\left[(4 - 2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}$$

$$dV = \pi x^2 dy = \pi y^2 dy$$

$$V_{BOTTOM} = \pi \int_0^1 y^2\, dy = \pi \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

$$V_{TOP} + V_{BOTTOM} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \quad \textit{Cubic Units}$$