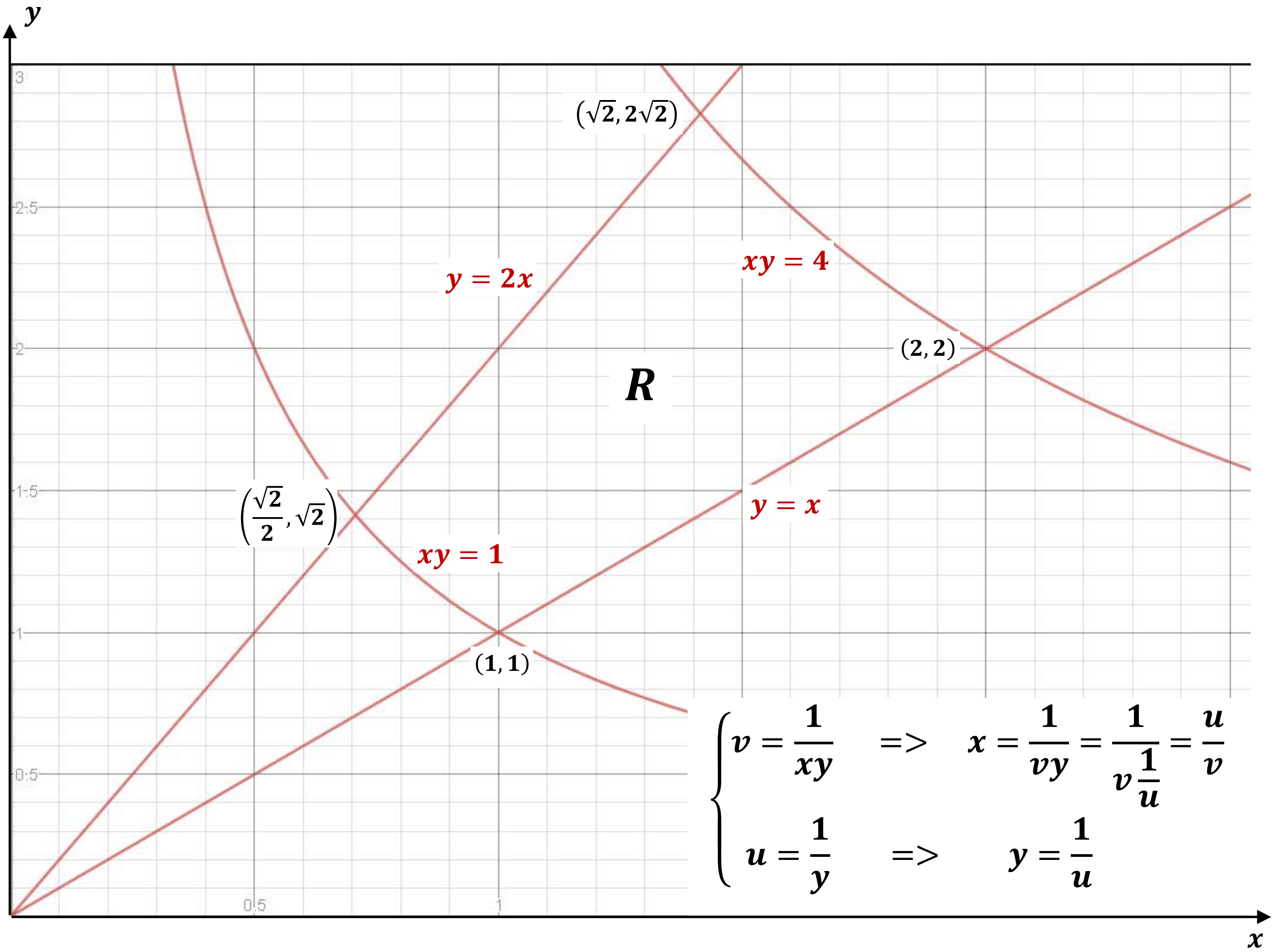
חשב את השטח ברביע הראשון המוגבל ע"י העקומות $xy=1$, $xy=4$, $y=x$, $y=2x$

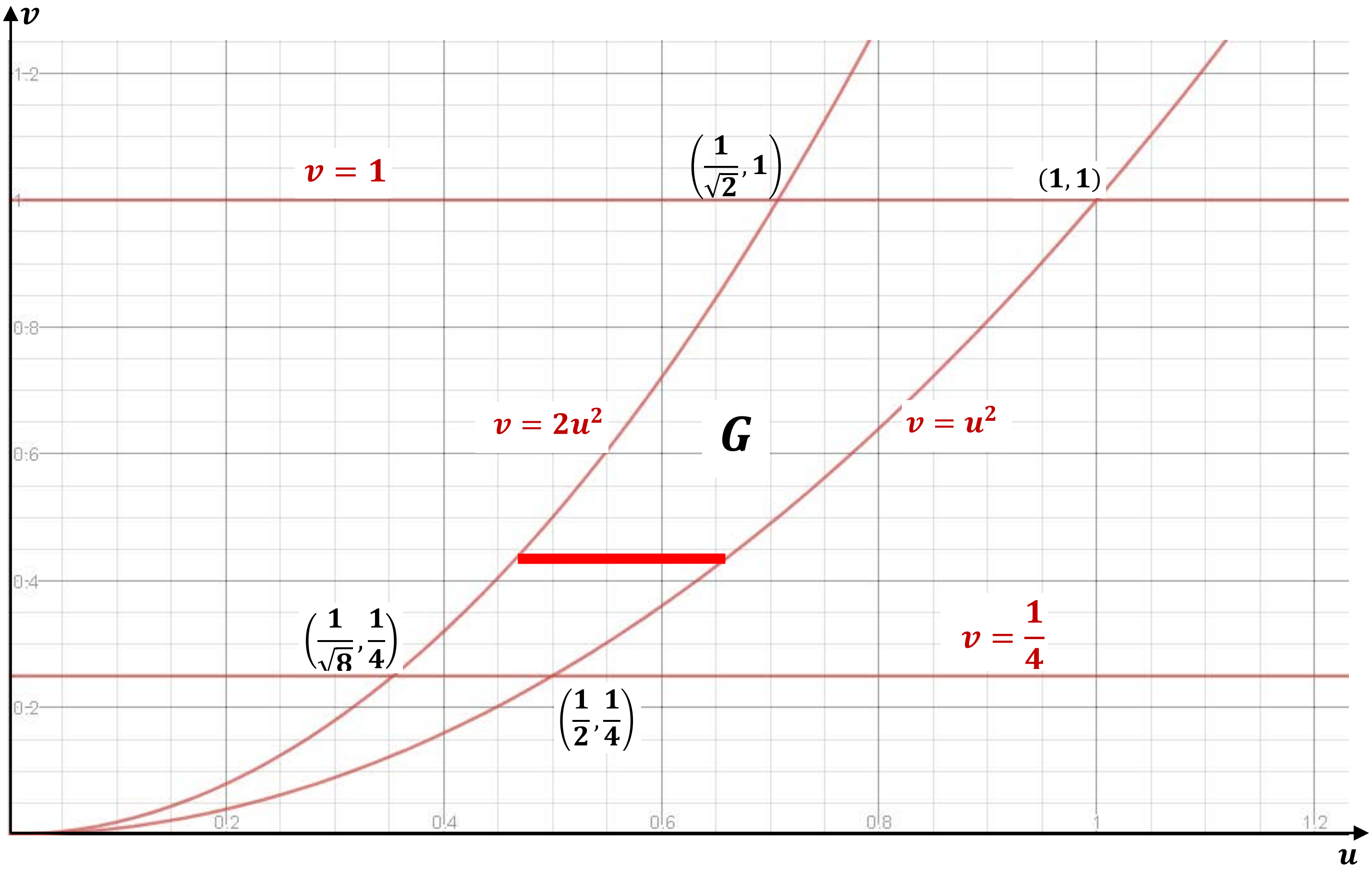
ניקח **z=1** כך שהנפח <u>המתקבל</u> והשטח <u>המבוקש</u> יהיו בעלי אותו הערך.



$$\begin{cases} v = \dfrac{1}{xy} \quad => \quad x = \dfrac{1}{vy} = \dfrac{1}{v\frac{1}{u}} = \dfrac{u}{v} \\ u = \dfrac{1}{y} \quad => \quad y = \dfrac{1}{u} \end{cases}$$

משוואות uv מפושטות	משוואות uv עבור הגבולות של G	משוואות xy עבור הגבולות של R
$v=1$	$\frac{u}{v}\cdot\frac{1}{u}=1$	$xy=1$
$v=\frac{1}{4}$	$\frac{u}{v}\cdot\frac{1}{u}=4$	$xy=4$
$v=2u^2$	$\frac{1}{u}=\frac{2u}{v}$	$y=2x$
$v=u^2$	$\frac{1}{u}=\frac{u}{v}$	$y=x$

$$J_{(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ -\frac{1}{u^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{uv^2}$$



אינטגרציה קודם לפי u (קירות שוכבים) מניבה את התוצאה באמצעות חישובו של אינטגרל יחיד:

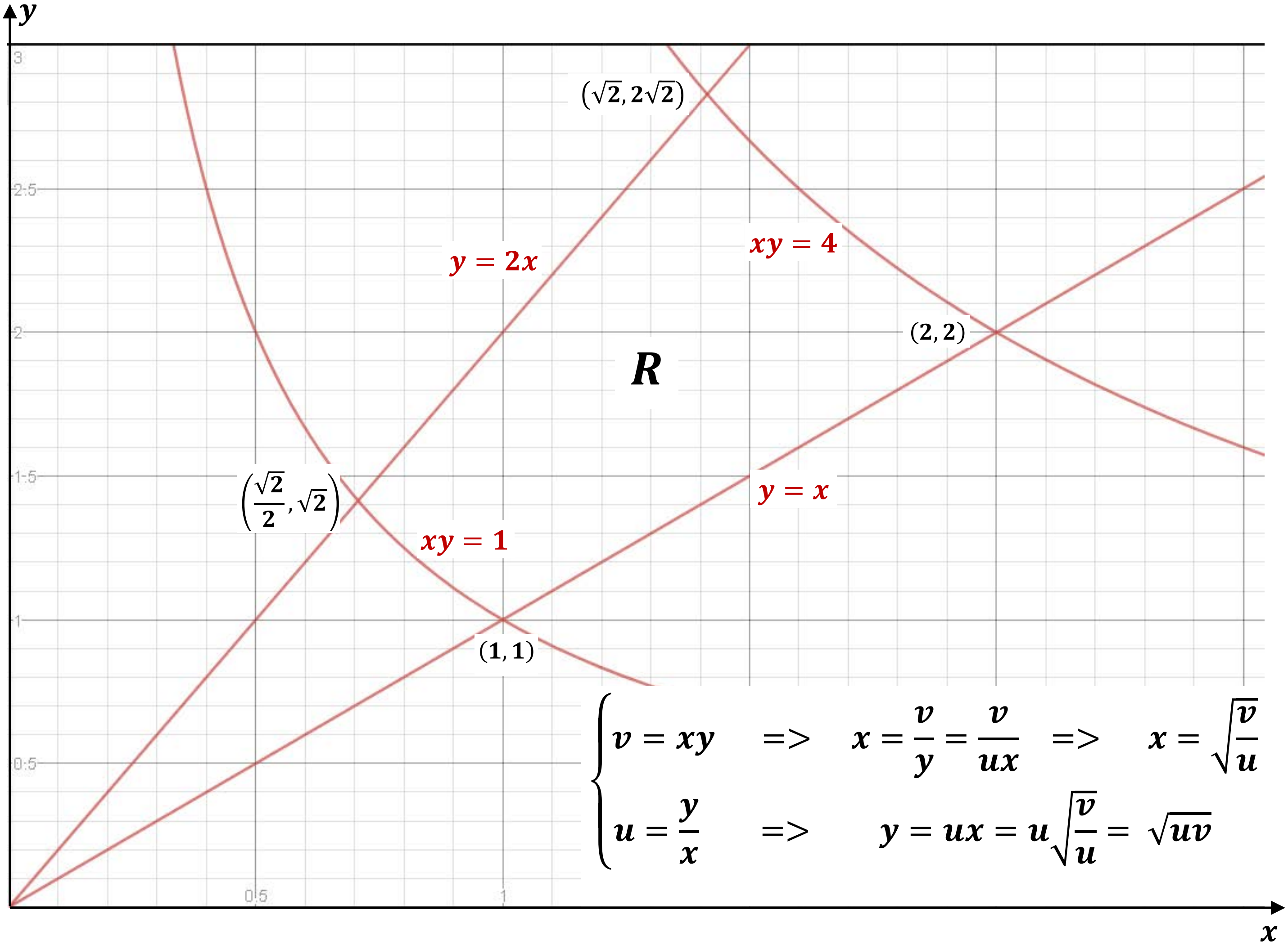
$$\int_{\frac{1}{4}}^{1}\int_{\sqrt{\frac{v}{2}}}^{\sqrt{v}} \frac{1}{uv^2}dudv = \int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{lnu}{v^2}\Bigg|_{\sqrt{\frac{v}{2}}}^{\sqrt{v}} dv = \int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{ln\sqrt{2}}{v^2}dv = -ln\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{v}\right)\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{1} =$$

$$= -ln\sqrt{2}\cdot(1-4) = 3ln\sqrt{2} = \frac{3}{2}ln2 \approx 1.0397$$

הודות לשימוש בהצבה, קיבלנו אינטגרל יחיד לחישוב במקום שלושה.

בעמוד הבא, הצבה יפה עוד יותר! כזו אשר מניבה מלבן במישור u, v !

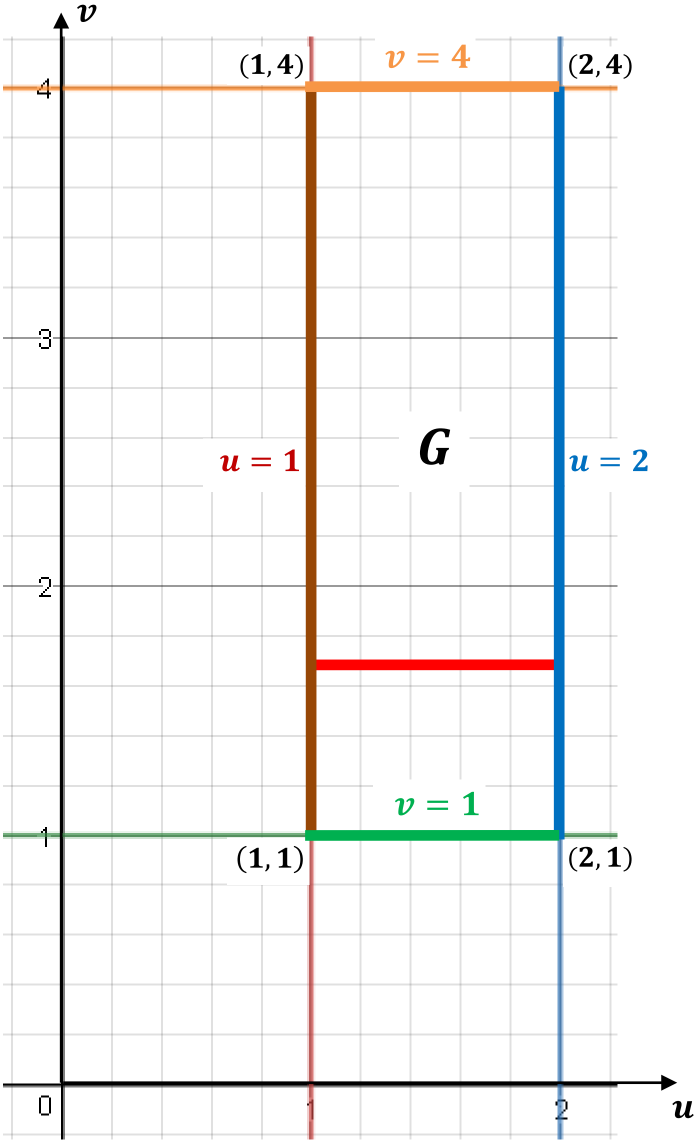
האותיות הקטנות...היעקוביאן קשה יותר לחישוב – אין ארוחות חינם!



$$\begin{cases} v = xy \quad => \quad x = \dfrac{v}{y} = \dfrac{v}{ux} \quad => \quad x = \sqrt{\dfrac{v}{u}} \\ u = \dfrac{y}{x} \quad => \quad y = ux = u\sqrt{\dfrac{v}{u}} = \sqrt{uv} \end{cases}$$

משוואות xy עבור הגבולות של R	משוואות uv עבור הגבולות של G	משוואות uv מפושטות
$xy = 1$	$\sqrt{\frac{v}{u}} \cdot \sqrt{uv} = 1$	$v = 1$
$xy = 4$	$\sqrt{\frac{v}{u}} \cdot \sqrt{uv} = 4$	$v = 4$
$y = 2x$	$\sqrt{uv} = 2\sqrt{\frac{v}{u}}$	$u = 2$
$y = x$	$\sqrt{uv} = \sqrt{\frac{v}{u}}$	$u = 1$

$$J_{(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{\sqrt{v}}{2u^{3/2}} & \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{vmatrix} = \left| -\frac{1}{4u} - \frac{1}{4u} \right| = \frac{1}{2u}$$



אינטגרציה קודם לפי u (קירות שוכבים) ?

או קודם לפי v (קירות עומדים) ?

כאן זה ממש לא משנה!

אנ-דנ-דינו....נלך על קירות שוכבים:

$$\int_1^4\int_1^2 \frac{1}{2u}\,du\,dv = \int_1^4 \frac{\ln u}{2}\Big|_1^2 dv =$$

$$= \int_1^4 \frac{\ln 2}{2}dv = \frac{\ln 2}{2}\cdot v\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{\ln 2}{2}\cdot(4-1) = \frac{3}{2}\ln 2 \approx 1.0397$$

גם כאן קיבלנו אינטגרל יחיד לחישוב במקום שלושה,

הודות לשימוש בהצבה, אלא שהפעם קיבלנו מתנה

נוספת – גבולות אינטגרציה קבועים!