מינימום הריבועים

כשמנסים להתאים ישר לאוסף של נקודות (x_n,y_n) , ... , (x_2,y_2) , (x_1,y_1), מחפשים בד"כ את הישר אשר סכום ריבועי מרחקיהן של הנקודות ממנו הוא מינימאלי. משמעות הדבר היא מציאת הערכים של m ו- b אשר מביאים למינימום את הפונקציה $w=(mx_1+b-y_1)^2+\cdots+(mx_n+b-y_n)^2$.
מבחני הנגזרת הראשונה והשנייה מראים כי הערכים של m ו- b אשר עושים זאת הינם :

$$m=\frac{(\sum x_k)\cdot(\sum y_k)-n\sum x_k y_k}{(\sum x_k)^2-n\sum {x_k}^2} \quad , \quad b=\frac{1}{n}\left(\sum y_k - m\sum x_k\right)$$

כשכל הסכומים (הסיגמות) "רצים" מ- $k=1$ ל- $k=n$.

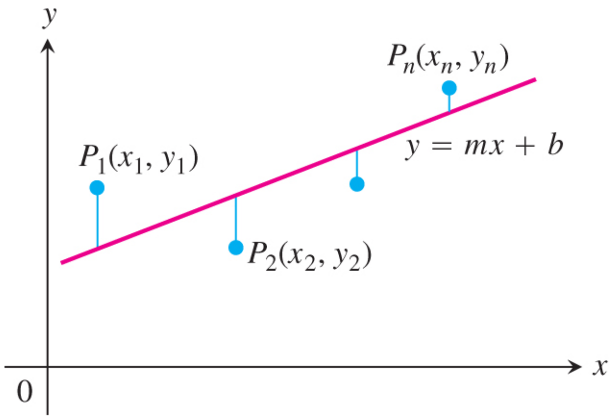
הישר $y=mx+b$ שבו נקבעו m ו- b בעזרת הנוסחאות הנ"ל נקרא **הישר של מינימום הריבועים**, או **קו הרגרסיה**.
קו הרגרסיה מאפשר לנו לבטא מידע באופן פשוט יחסית ולנתחו באופן אנליטי.

בתמונה משמאל :

כדי להתאים ישר לאוסף נקודות שאינו ליניארי, אנו בוחרים בישר אשר ממזער את הסכום של ריבועי הסטיות :

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i-(mx_i+b)]^2 \quad \rightarrow \quad min$$

y_i הוא הערך שהתקבל בניסוי, ו- mx_i+b הוא הערך החזוי.



הנוסחאות ל- m ו- b יכולות להיכתב גם כך:

$$m=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2} \quad , \quad b=\frac{\overline{x^2}\cdot\bar{y}-\bar{x}\cdot\overline{xy}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2}$$

דוגמה מהספר (עמ' 1036) – **מצא את קו הרגרסיה של הנקודות** $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,4)$, $(4,5)$

פיתרון:

$$\bar{x}=\frac{0+1+2+3+4}{5}=2 \quad , \quad \bar{y}=\frac{1+3+2+4+5}{5}=3 \quad , \quad \overline{xy}=\frac{0\cdot1+1\cdot3+2\cdot2+3\cdot4+4\cdot5}{5}=\frac{39}{5} \quad , \quad \overline{x^2}=\frac{0^2+1^2+2^2+3^2+4^2}{5}=6$$

$$m=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2}=\frac{39/5-2\cdot3}{6-2^2}=0.9 \quad , \quad b=\frac{\overline{x^2}\cdot\bar{y}-\bar{x}\cdot\overline{xy}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2}=\frac{6\cdot3-2\cdot39/5}{6-2^2}=1.2$$

קו מינימום הריבועים (**קו הרגרסיה**) הינו $y=0.9x+1.2$.

מסורטט באיור משמאל.