שיטת כופלי לגרנז'

נניח ש- $f_{(x,y,z)}$ ו- $g_{(x,y,z)}$ גזירות שתיהן. כדי למצוא את ערכי המקסימום המקומי והמינימום המקומי של f תחת האילוץ $g_{(x,y,z)} = 0$, נמצא את הערכים של x , y , z ו- λ אשר מקיימים את שתי המשוואות $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$ ו- $g_{(x,y,z)} = 0$.

עבור פונקציות של שני משתנים, התנאים דומים רק ללא המשתנה z .

דוגמה מהספר (עמ' 1043) – שימוש בשיטת הכופלים של לגרנז'

מצא את הערכים הגדולים ביותר והקטנים ביותר שמקבלת הפונקציה $f_{(x,y)} = xy$ על האליפסה $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

פיתרון: אנו מחפשים את ערכי הקיצון של $f_{(x,y)} = xy$ תחת האילוץ $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$.

נמצא את ערכיהם של x , y ו- λ אשר מקיימים את משוואת הגרדיינט $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$ ואת המשוואה $g_{(x,y)} = 0$.

פתרון משוואת הגרדיינט:

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \quad => \quad y\hat{x} + x\hat{y} = \lambda\left(\frac{x}{4}\hat{x} + y\hat{y}\right) \quad => \quad y\hat{x} + x\hat{y} = \frac{\lambda x}{4}\hat{x} + \lambda y\hat{y} \quad =>$$

$$=> \quad \begin{cases} y = \frac{\lambda x}{4} \\ x = \lambda y \end{cases} \quad => \quad y = \frac{\lambda^2 y}{4} \quad => \quad \lambda^2 = 4 \quad => \quad \lambda = \pm 2 \quad , \quad x = \pm 2y$$

את האפשרות $(x,y) = (0,0)$ אנו שוללים, למרות היותה פיתרון של המשוואות, כי הנקודה $(0,0)$ אינה על האליפסה.

נציב אם כן $x = \pm 2y$ במשוואה $g_{(x,y)} = 0$:

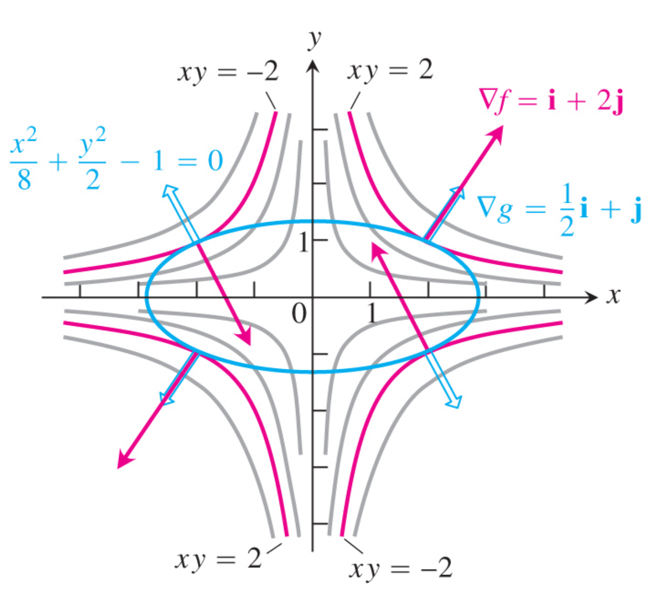
$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \quad => \quad \frac{(\pm 2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \quad => \quad 4y^2 + 4y^2 = 8 \quad => \quad 8y^2 = 8 \quad => \quad y = \pm 1 \ , \ x = \pm 2$$

ערכי הקיצון שמקבלת $f_{(x,y)} = xy$ על האליפסה $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ מתקבלים במי מארבע הנקודות :

$(2,1) \quad (-2,1) \quad (2,-1) \quad (-2,-1)$

ערכי קיצון אלה הינם $xy = 2$ ו- $xy = -2$.

הפיתרון במבט גיאומטרי.



קווי הרמה של הפונקציה $f_{(x,y)} = xy$ הם ההיפרבולות $xy = c$.

על היפרבולות רחוקות מהראשית f גדולה יותר (בערכה המוחלט).

אנו מעוניינים בערכי הקיצון של $f_{(x,y)}$ תחת התנאי שהנקודה (x,y) נמצאת גם על האליפסה $x^2 + 4y^2 = 8$. מבין כל ההיפרבולות אשר חותכות את האליפסה, אילו הן הרחוקות ביותר מהראשית?

אלה אשר רק "משפשפות" את האליפסה, ז"א משיקות לה.

בנקודות ההשקה, וקטור אשר מאונך להיפרבולה מאונך גם לאליפסה, כך ש- $\vec{\nabla} f = y\hat{x} + x\hat{y}$ הינו כפולה $(\lambda = \pm 2)$ של $\vec{\nabla} g = \frac{x}{4}\hat{x} + y\hat{y}$.

בנק' $(2,1)$, $\vec{\nabla} f = \hat{x} + 2\hat{y}$, $\vec{\nabla} g = \frac{1}{2}\hat{x} + \hat{y}$, ו- $\vec{\nabla} f = 2\vec{\nabla} g$.

בנק' $(-2,1)$, $\vec{\nabla} f = \hat{x} - 2\hat{y}$, $\vec{\nabla} g = -\frac{1}{2}\hat{x} + \hat{y}$, ו- $\vec{\nabla} f = -2\vec{\nabla} g$.

דוגמה מהספר (עמ' 1044) – מציאת ערכי קיצון של פונקציה על מעגל.

מצא את ערכי המקסימום והמינימום של הפונקציה $f_{(x,y)} = 3x + 4y$ על המעגל $x^2 + y^2 = 1$.

פיתרון: אנו מתאימים את הבעיה לתבנית לגרנז' עם $f_{(x,y)} = 3x + 4y$ ו- $g_{(x,y)} = x^2 + y^2 - 1$, ומחפשים את הערכים של x , y ו- λ אשר מקיימים את המשוואות $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$ ו- $g_{(x,y)} = 0$

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \quad => \quad 3\hat{x} + 4\hat{y} = \lambda(2x\hat{x} + 2y\hat{y}) \quad => \quad 3\hat{x} + 4\hat{y} = 2\lambda x\hat{x} + 2\lambda y\hat{y} \quad =>$$

$$=> \begin{cases} 3 = 2\lambda x \\ 4 = 2\lambda y \end{cases} => \quad \frac{3}{4} = \frac{x}{y} \quad => \quad 3y = 4x \quad => \quad y = \frac{4x}{3}$$

<u>הערה</u>: חילקתי המשוואות זו בזו כי כאן $y \neq 0$, $\lambda \neq 0$ (גם בדוגמה הקודמת היה מצב דומה, ויכולנו לעשות זאת).
הספר אינו נוהג לעשות זאת למרות שזה מקצר את החישוב, מטעמי זהירות כנראה. אגב, כאן $\lambda = 2.5$.

$$g_{(x,y)} = 0 \quad => \quad x^2 + y^2 = 1 \quad => \quad x^2 + \left(\frac{4x}{3}\right)^2 = 1 \quad => \quad 9x^2 + 16x^2 = 9 \quad => \quad x^2 = \frac{9}{25} \quad =>$$

$$x = \pm\frac{3}{5} \quad , \quad y = \pm\frac{4}{5} \quad => \quad \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \; , \; \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \; , \; \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \; , \; \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

נציב נקודות אלה ב- $f_{(x,y)}$ כדי לקבל את ערכי המקסימום והמינימום שלה על המעגל $x^2 + y^2 = 1$:

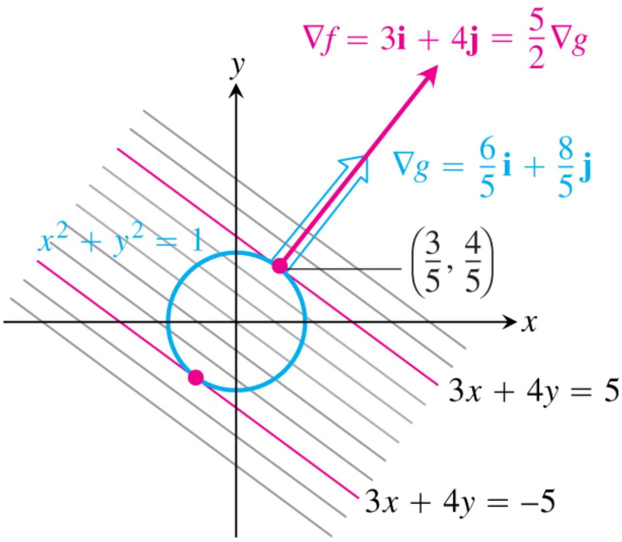
$$f_{\left(\frac{3}{5}\,,\,\frac{4}{5}\right)} = 3 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \frac{4}{5} = 5 \quad , \quad f_{\left(-\frac{3}{5}\,,\,\frac{4}{5}\right)} = 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

$$f_{\left(\frac{3}{5}\,,\,-\frac{4}{5}\right)} = 3 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{7}{5} \quad , \quad f_{\left(-\frac{3}{5}\,,\,-\frac{4}{5}\right)} = 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 4 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -5$$

אם כך, ערכי המקסימום והמינימום של הפונקציה $f_{(x,y)} = 3x + 4y$ על המעגל $x^2 + y^2 = 1$ הם **5** ו- **-5** בהתאמה.

<u>הפיתרון במבט גיאומטרי.</u>

קווי הרמה של $f_{(x,y)} = 3x + 4y$ הם הישרים $3x + 4y = c$.
על ישרים רחוקים מהראשית f גדולה יותר (בערכה המוחלט).
אנו מעוניינים בערכי הקיצון של $f_{(x,y)}$ תחת התנאי שהנקודה (x, y) נמצאת **גם** על המעגל $x^2 + y^2 = 1$. מבין כל הישרים אשר חותכים את המעגל, אילו הם הרחוקים ביותר מהראשית?
אלה אשר משיקים למעגל. הם הרחוקים ביותר מהראשית.
בנקודות ההשקה, וקטור אשר מאונך לישר מאונך גם למעגל,
כך ש- $\vec{\nabla} f$ הינו כפולה סקלרית של $\vec{\nabla} g$, ז"א , $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$.



הערך המקסימלי שמקבלת הפונקציה $f_{(x,y)} = 3x + 4y$ על המעגל $x^2 + y^2 = 1$ הוא **5**, וזה קורה בנקודה $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
הערך המינימלי שהיא מקבלת על המעגל הנ"ל הוא **-5**, והדבר קורה בנקודה $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.
בשתי נקודות אלה שעל המעגל, ורק בשתי אלה, $\vec{\nabla} f$ הינו כפולה סקלרית של $\vec{\nabla} g$.
בציור מוראים שני הגרדיינטים האלה בנקודת המקסימום של f על המעגל, אך לא בנקודת המינימום שלה (חבל).

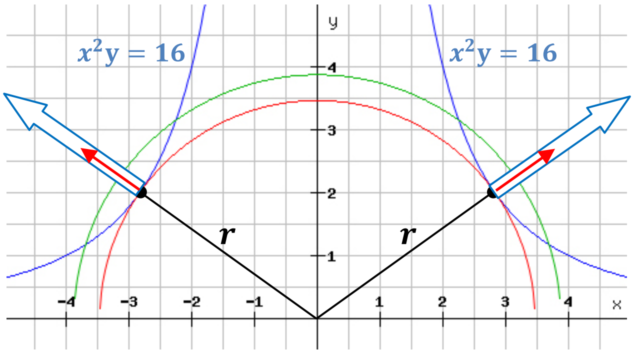
דוגמה נוספת – מציאת המרחק המינימאלי של עקומה מראשית הצירים.

מצא את המרחק המינימאלי של העקומה $x^2y = 16$ מראשית הצירים.

פיתרון: כשאנו דנים במרחק מראשית הצירים, אנו דנים בעצם ברדיוס **r** של מעגל קנוני מהצורה $r^2 = x^2 + y^2$.

נחפש אם כך את ערכי המינימום של הפונקציה $f_{(x,y)} = x^2 + y^2$ על העקום $x^2y = 16$.

במילים אחרות, נחפש את r^2 של המעגל הקנוני הקטן ביותר אשר "עדיין" נוגע בעקום.



קווי הרמה של $f_{(x,y)} = x^2 + y^2$ הם המעגלים $x^2 + y^2 = c$.

ככל שהמעגלים קטנים יותר, f קטנה יותר, כי הרי $f = r^2$.

אנו מעוניינים בערך המינימאלי של $f_{(x,y)}$ תחת התנאי שהנקודה (x,y)

נמצאת גם על העקום $x^2y = 16$. מבין כל המעגלים אשר חותכים את

העקום $x^2y = 16$, איזה הוא הקטן ביותר? **זה אשר משיק לעקום.**

בנקודות ההשקה, וקטור אשר מאונך לעקום מאונך גם למעגל,

נתאים את הבעיה לתבנית לגרנז' עם $f_{(x,y)} = x^2 + y^2$ ו- $g_{(x,y)} = x^2y - 16$, ונחפש את הערכים של x , y ו- λ אשר מקיימים את המשוואות $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$ ו- $g_{(x,y)} = 0$

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \quad => \quad 2x\hat{x} + 2y\hat{y} = \lambda\left(2xy\hat{x} + x^2\hat{y}\right) \quad =>$$

$$\begin{cases} x = \lambda xy \\ 2y = \lambda x^2 \end{cases} \quad => \quad \frac{2y}{x} = \frac{x}{y} \quad => \quad 2y^2 = x^2 \quad => \quad \pm\sqrt{2}y = x$$

את האפשרות $(x,y) = (0,0)$ אנו שוללים, למרות היותה פיתרון של המשוואות, כי הנקודה $(0,0)$ אינה על העקום.

<u>הערה</u>: חילקתי המשוואות זו בזו כי כאן $(x,y) \neq (0,0)$, $\lambda \neq 0$ (גם בדוגמה הראשונה היה כך ויכולנו לעשות זאת).
הספר אינו נוהג לעשות זאת למרות שזה מקצר את החישוב, מטעמי זהירות כנראה. אגב, כאן $\lambda = 0.5$.

נציב כעת $x^2 = 2y^2$ במשוואה $g_{(x,y)} = 0$:

$$g_{(x,y)} = 0 \quad => \quad x^2y = 16 \quad => \quad 2y^3 = 16 \quad => \quad y^3 = 8 \quad => \quad y = 2 \quad => \quad x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\left(-2\sqrt{2}\ ,\ 2\right) \qquad \left(2\sqrt{2}\ ,\ 2\right)$$

נציב נקודות אלה ב- $f_{(x,y)}$ כדי לקבל את ערך המינימום שלה על העקום $x^2y = 16$:

$$f_{(-2\sqrt{2}\ ,2)} = \left(-2\sqrt{2}\right)^2 + 2^2 = 12 \qquad , \qquad f_{(2\sqrt{2}\ ,2)} = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 2^2 = 12$$

המרחק המינימאלי של העקומה $x^2y = 16$ מראשית הצירים הוא $\sqrt{12}$ אם כך.