אינטגרל כפול – הצבה

כמו באינטגרלים של משתנה יחיד, גם באינטגרלים כפולים אנו משתמשים לפעמים בהצבה כדי לפשט את האינטגרציה.

כאן, ההצבה מתארת את השינויים במשתני האינטגרציה כהתמרות (טרנספורמציות) של אזורי האינטגרציה.

נניח שאזור $\boldsymbol{G}$ במישור $\boldsymbol{uv}$ מותמר "אחד לאחד" לאזור $\boldsymbol{R}$ במישור $\boldsymbol{xy}$, באמצעות משוואות מהצורה $y = h_{(u,v)}$, $x = g_{(u,v)}$.

$\boldsymbol{R}$ מכונה אז **הדמות** של $\boldsymbol{G}$ תחת ההתמרה, ואילו $\boldsymbol{G}$ מכונה **הדמות הקדומה** של $\boldsymbol{R}$.

כל פונקציה $f_{(x,y)}$ אשר מוגדרת על $\boldsymbol{R}$, יכולה להיחשב כפונקציה $f_{[g(u,v)\,,h(u,v)]}$ אשר מוגדרת על $\boldsymbol{G}$.

באיזה אופן קשור האינטגרל של $f_{(x,y)}$ על $\boldsymbol{R}$ לאינטגרל של $f_{[g(u,v)\,,h(u,v)]}$ על $\boldsymbol{G}$?

התשובה היא: אם ל- g , h ו- f ישנן נגזרות חלקיות רציפות, ו- $J_{(u,v)}$ מתאפס רק בנקודות מבודדות (אם בכלל) אזי

$$\iint_R f_{(x,y)}\,dxdy = \iint_G f_{[g(u,v)\,,h(u,v)]}\left|J_{(u,v)}\right|dudv$$

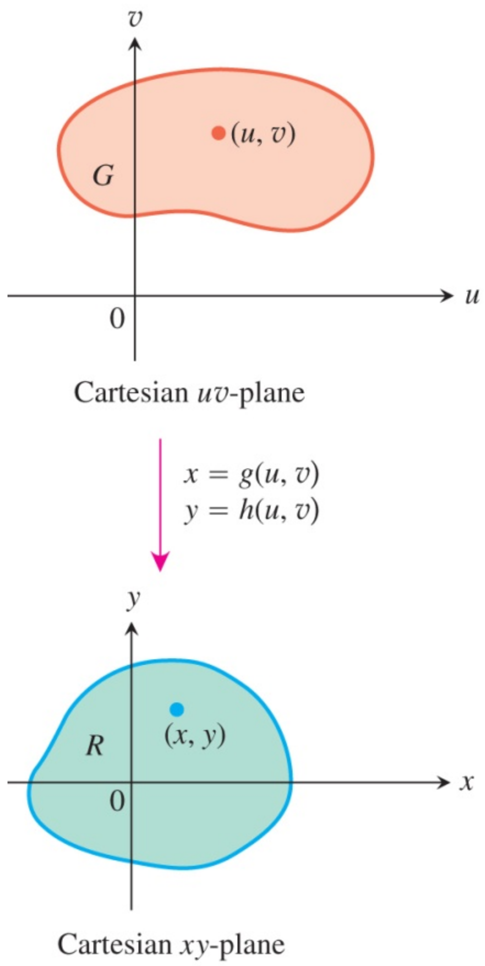
הגורם $J_{(u,v)}$ אשר מופיע בערך מוחלט הוא **היעקוביאן** של התמרת הקואורדינאטות.

היעקוביאן מראה באיזו מידה מתרחב או מתכווץ השטח סביב נקודה ב- $\boldsymbol{G}$, שעה ש- $\boldsymbol{G}$ מותמר ל- $\boldsymbol{R}$.

הגדרה: **יעקוביאן**

היעקוביאן של התמרת הקואורדינאטות $y = h_{(u,v)}$, $x = g_{(u,v)}$ הינו

$$J_{(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}$$



באיור משמאל:

המשוואות $x = g_{(u,v)}$ ו- $y = h_{(u,v)}$ מאפשרות לנו להסב אינטגרל

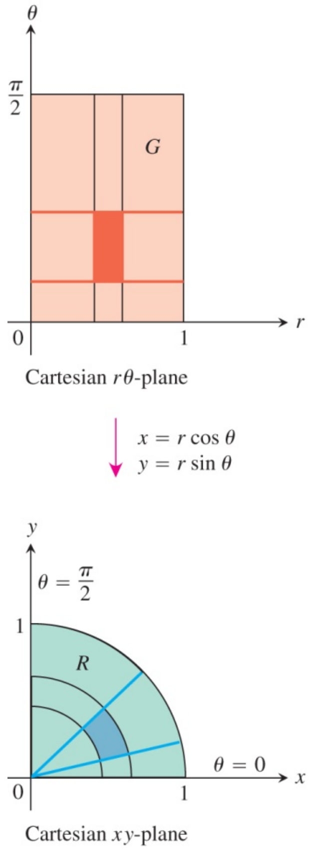
מעל איזור $\boldsymbol{R}$ שבמישור $\boldsymbol{xy}$, לאינטגרל מעל איזור $\boldsymbol{G}$ שבמישור $\boldsymbol{uv}$.

בקואורדינאטות פולאריות ישנם r ו- θ במקום u ו- v. עם $x = r\cos\theta$ ו- $y = r\sin\theta$, היעקוביאן הינו

$$J_{(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial r}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} = \cos\theta\cdot r\cos\theta + \sin\theta\cdot r\sin\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

אי לכך משוואת ההתמרה כאן היא:

$$\iint_R f_{(x,y)}\,dxdy = \iint_G f_{[g(u,v),h(u,v)]}\,|J_{(u,v)}|\,dudv \quad => \quad \iint_R f_{(x,y)}\,dxdy = \iint_G f_{[r\cos\theta, r\sin\theta]}\,|r|\,drd\theta$$



האיור משמאל מראה כיצד המשוואות $x = r\cos\theta$ ו- $y = r\sin\theta$

מתמירות את המלבן $G:\ \ 0 \le r \le 1\ ,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

לרבע מעגל R התחום ע"י $x^2 + y^2 = 1$ ברביע I של מישור xy .

שימו לב לכך שהאינטגרל אשר באגף ימין של משוואת ההתמרה

$$\iint_R f_{(x,y)}\,dxdy = \iint_G f_{[g(u,v),h(u,v)]}\,|J_{(u,v)}|\,dudv$$

איננו האינטגרל של $f_{[r\cos\theta, r\sin\theta]}$ מעל איזור שבמישור הקואורדינאטות הפולארי.

זהו האינטגרל של מכפלת $f_{[r\cos\theta, r\sin\theta]}$ ב- r מעל איזור G שבמישור הקרטזי r,θ .

דוגמה מהספר (עמ' 1130) – שימוש בהצבה לצורך אינטגרציה.

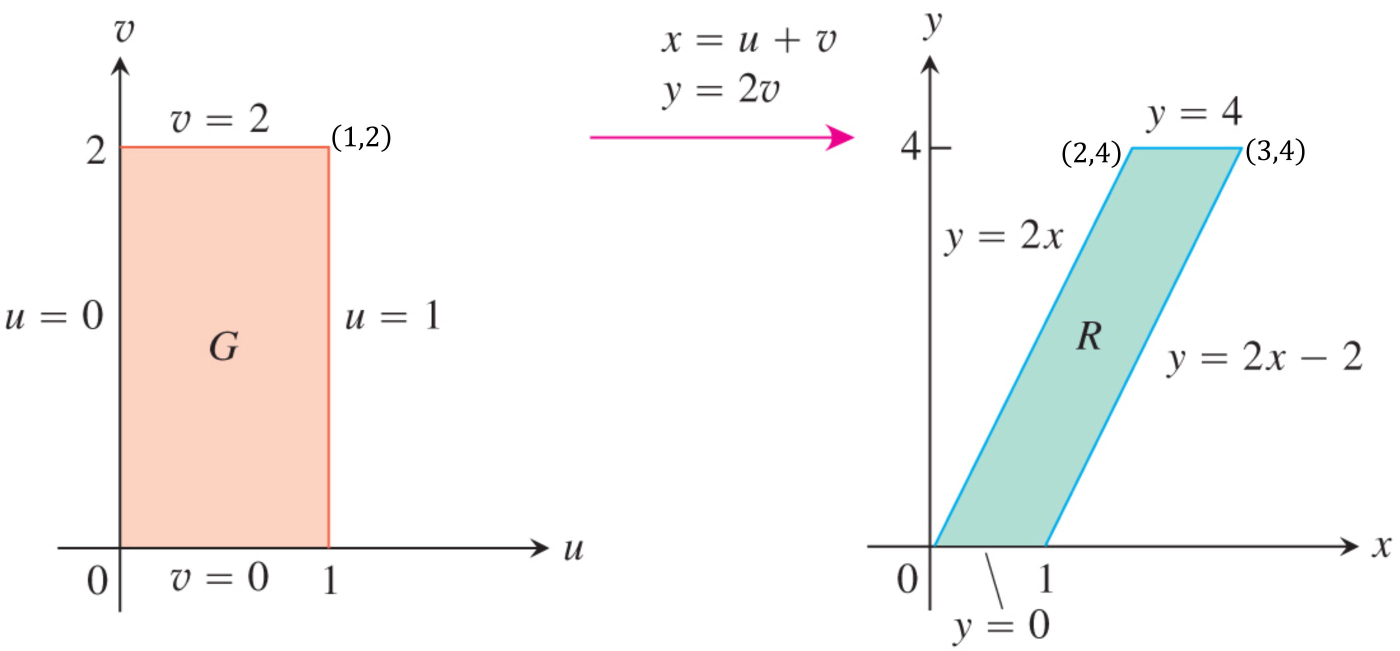
חשב את $\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \left(\frac{2x-y}{2}\right) dxdy$ **באמצעות ההתמרה** $u = \frac{2x-y}{2}$, $v = \frac{y}{2}$ **וביצוע אינטגרציה מעל האזור המתאים במישור** uv .

פיתרון:

כדי להשתמש במשוואה $\iint_R f_{(x,y)}\, dxdy = \iint_G f_{[g(u,v),h(u,v)]} \left|J_{(u,v)}\right| dudv$ עלינו למצוא את איזור uv המתאים ב- G , ואת היעקוביאן של ההתמרה. לשם כך אנו פותרים את המשוואות $u = \frac{2x-y}{2}$ ו- $v = \frac{y}{2}$ ומקבלים $x = u + v$ ו- $y = 2v$.
נציב ביטויים האלה במשוואות הגבולות של R כדי לקבל את הגבולות של G:

משוואות uv מפושטות	משוואות uv עבור הגבולות של G	משוואות xy עבור הגבולות של R
$u = 0$	$u + v = \frac{2v}{2} = v$	$x = \frac{y}{2}$
$u = 1$	$u + v = \frac{2v}{2} + 1 = v + 1$	$x = \frac{y}{2} + 1$
$v = 0$	$2v = 0$	$y = 0$
$v = 2$	$2v = 4$	$y = 4$

שימו לב! כאן R הוא מרובע ולכן ישנן בטבלה ארבע שורות. **קודם כל מומלץ לשרטט את R** כדי לקבל תמונה ברורה.



האיור ממחיש כיצד המשוואות $x = u + v$ ו- $y = 2v$ מתמירות את G ל- R.
הפיכת ההתמרה באמצעות המשוואות $u = \frac{2x-y}{2}$ ו- $v = \frac{y}{2}$, מתמירה את R ל- G.

היעקוביאן של ההתמרה הינו

$$J_{(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u+v) \\ \frac{\partial}{\partial u}(2v) & \frac{\partial}{\partial v}(2v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 2$$

כעת יש לנו את כל שדרוש למשוואת ההתמרה - היעקוביאן והגבולות של G:

$$\iint_R f_{(x,y)}\, dxdy = \iint_G f_{[g(u,v),h(u,v)]} \left|J_{(u,v)}\right| dudv \quad =>$$

$$=> \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \left(\frac{2x-y}{2}\right) dxdy = \int_0^2 \int_0^1 (u) \cdot (2) dudv = \int_0^2 u^2 \left|_0^1 dv\right. = \int_0^2 dv = v \left|_0^2\right. = 2$$

דוגמה מהספר (עמ' 1130) – שימוש בהצבה לצורך אינטגרציה.

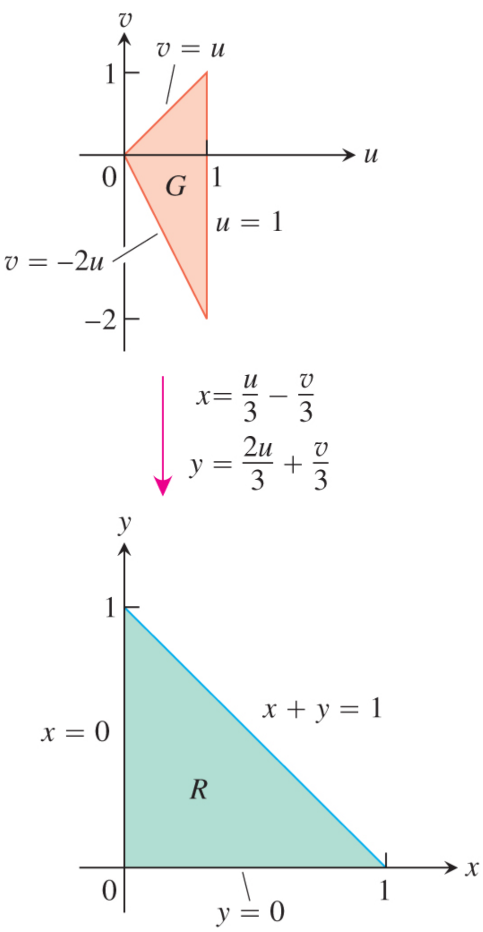
חשב את $\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,(y-2x)^2dydx$

פיתרון:

האינטגרנד מרמז על הטרנספורמציה $u=x+y$ ו- $v=y-2x$. פתרון שתי המשוואות הינו $x=\frac{u-v}{3}$ ו- $y=\frac{2u+v}{3}$.
נציב ביטויים האלה במשוואות הגבולות של R כדי לקבל את הגבולות של G:

משוואות uv מפושטות	משוואות uv עבור הגבולות של G	משוואות xy עבור הגבולות של R
$v=u$	$\frac{u-v}{3}=0$	$x=0$
$v=-2u$	$\frac{2u+v}{3}=0$	$y=0$
$u=1$	$\frac{2u+v}{3}=1-\frac{u-v}{3}$	$y=1-x$

שימו לב! כאן R הוא משולש ולכן ישנן בטבלה שלוש שורות. שוב - **מומלץ לשרטט את R** כדי לקבל תמונה ברורה.



היעקוביאן במקרה זה הינו

$$J_{(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u-v}{3}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u-v}{3}\right)\\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{2u+v}{3}\right) & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2u+v}{3}\right)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}$$

וכעת למשוואת ההתמרה

$$\iint_R f_{(x,y)}\,dydx \;=\; \iint_G f_{[g(u,v)\,,h(u,v)]}\left|J_{(u,v)}\right|dvdu \;=>$$

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,(y-2x)^2dydx \;=\; \int_0^1\int_{v=-2u}^{v=u}\sqrt{u}\,v^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)dvdu \;=$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^1\sqrt{u}\,v^3\Big|_{v=-2u}^{v=u}\cdot du \;=\; \frac{1}{9}\int_0^1\sqrt{u}\left(u^3+8u^3\right)du \;=$$

$$=\int_0^1\sqrt{u}\,u^3du \;=\; \int_0^1 u^{7/2}\,du \;=\; \frac{2}{9}u^{9/2}\Big|_{u=0}^{u=1} \;=\; \frac{2}{9}(1-0)=\frac{2}{9}$$

האיור ממחיש כיצד המשוואות $x=\frac{u-v}{3}$ ו- $y=\frac{2u+v}{3}$ מתמירות את G ל- R.
הפיכת ההתמרה באמצעות המשוואות $u=x+y$ ו- $v=y-2x$, מתמירה את R ל- G.