.1

א. פתור את המערכת $v = 2x + y$, $u = x - y$ עבור x ו- y במונחים של u ו- v .

אח"כ מצא את ערכו של היעקוביאן $\partial_{(x,y)}/\partial_{(u,v)}$.

פיתרון א':

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = 2x + y \end{cases} \quad => \quad u + v = 3x \quad => \quad x = \frac{u}{3} + \frac{v}{3} \quad , \quad y = x - u = \frac{u+v}{3} - u \quad => \quad y = \frac{v}{3} - \frac{2u}{3}$$

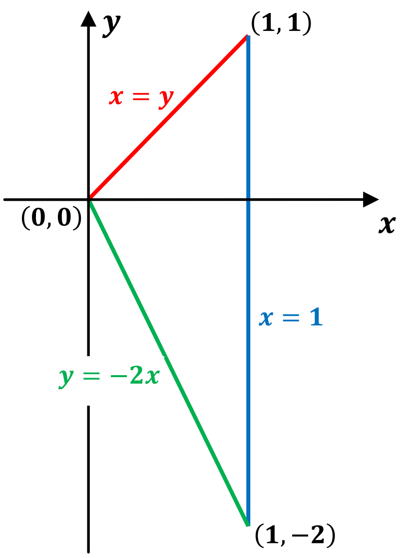
$$J_{(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \quad => \quad \partial_{(x,y)}/\partial_{(u,v)} = J_{(u,v)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

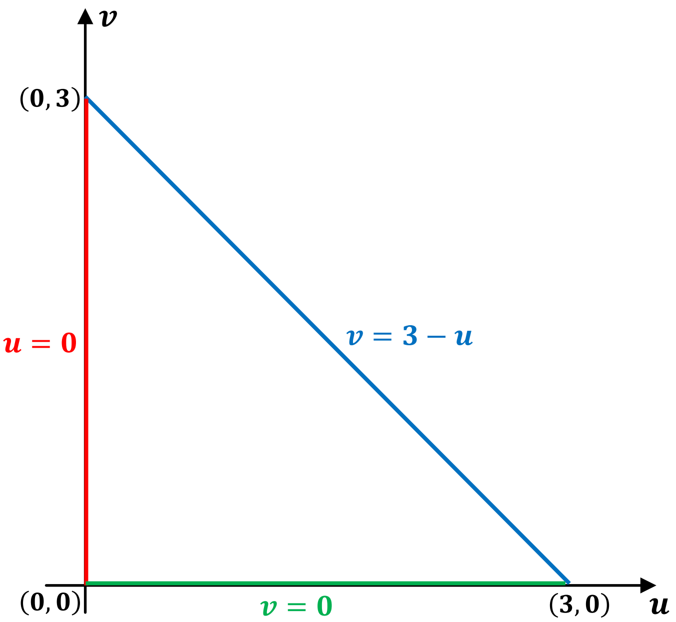
ב. מצא את הדמות המתקבלת מההתמרה $v = 2x + y$, $u = x - y$ של התחום המשולש, אשר

קודקודיו הם $(0,0)$, $(1,1)$ ו- $(1,-2)$ במישור xy . סרטט את התחום המותמר במישור uv .

פיתרון:

הדמות המתקבלת היא משולש י"ז ושווה שוקיים שקודקודיו הם $(0,0)$, $(0,3)$ ו- $(3,0)$ במישור uv .

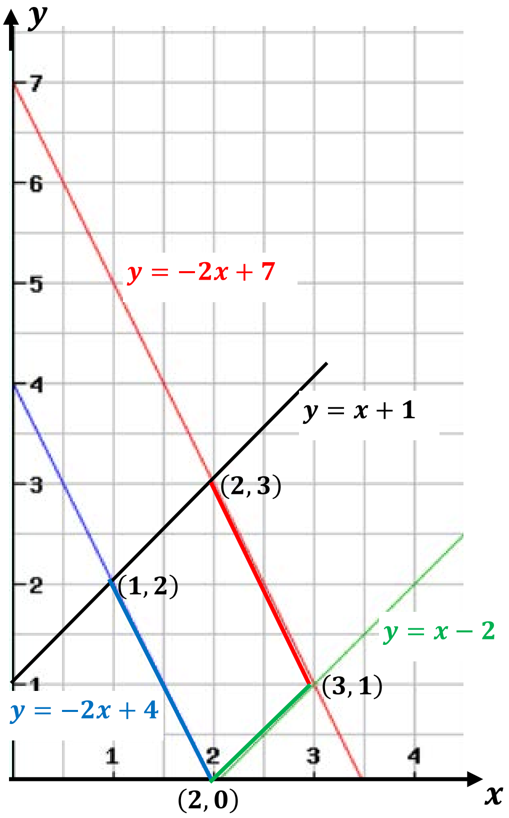




.2

השתמש בהתמרה של התרגיל הקודם כדי לחשב את האינטגרל $\iint_R (2x^2 - xy - y^2)\,dxdy$ באזור שברביע

הראשון אשר תחום ע"י הישרים: $y = x + 1$, $y = x - 2$, $y = -2x + 7$, $y = -2x + 4$



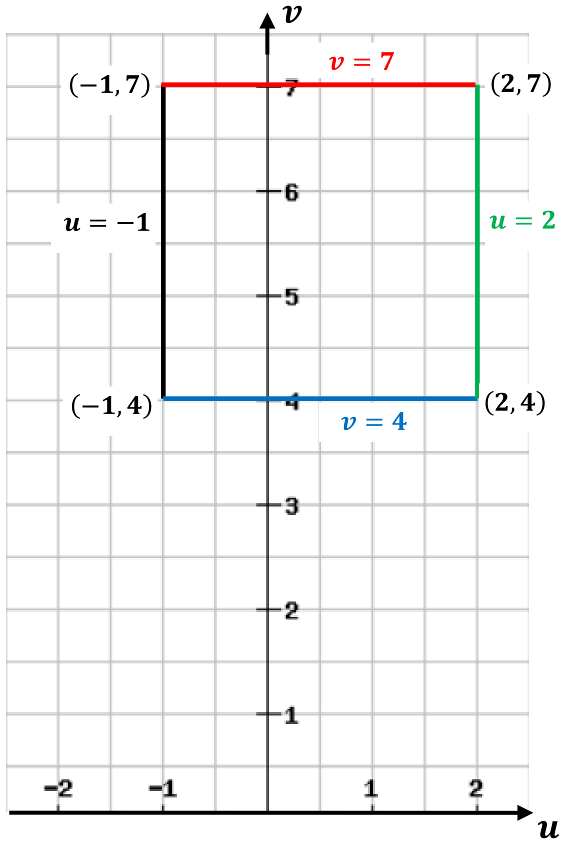
$$\begin{cases} u = x - y \\ v = 2x + y \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{u}{3} + \frac{v}{3} \\ y = \frac{v}{3} - \frac{2u}{3} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$J_{(u,v)} = \frac{1}{3}$$



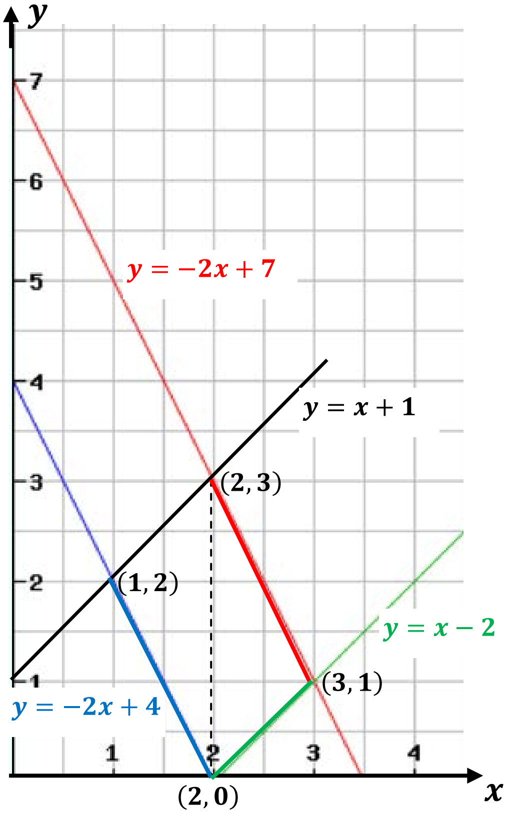
$$\begin{cases} u = x - y \\ v = 2x + y \end{cases} \;=>\; \iint_R (2x^2 - xy - y^2)\,dxdy = \iint_R (2x + y)(x - y)\,dxdy$$

$$\iint_R f_{(x,y)}\,dxdy = \iint_G f_{[g(u,v)\,,h(u,v)]}\,\left|J_{(u,v)}\right|dudv$$

$$\iint_R (2x + y)(x - y)\,dxdy = \int_4^7 \int_{-1}^2 (v)(u)\left(\frac{1}{3}\right)dudv = \frac{1}{3}\int_4^7 \left[v\frac{u^2}{2}\right|_{-1}^{2} dv =$$

$$= \frac{1}{6}\int_4^7 v(2^2 - (-1)^2)\,dv = \frac{3}{6}\int_4^7 vdv = \frac{1}{2}\left[\frac{v^2}{2}\right|_4^7 = \frac{1}{4}(7^2 - 4^2) = \frac{33}{4} = 8\tfrac{1}{4}$$

בעמוד הבא – פתרון האינטגרל ללא התמרה...



$$\iint\limits_R (2x^2 - xy - y^2)\, dxdy \;=\; \iint\limits_R (2x^2 - xy - y^2)\, dydx$$

$$\int_1^2 \int_{-2x+4}^{x+1} (2x^2 - xy - y^2)\, dydx \;+\; \int_2^3 \int_{x-2}^{-2x+7} (2x^2 - xy - y^2)\, dydx$$

$$\int_1^2 \int_{-2x+4}^{x+1} (2x^2 - xy - y^2)\, dydx \;=\; \int_1^2 \left[2x^2y - \frac{xy^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right|_{-2x+4}^{x+1} dx \;=$$

$$= \frac{1}{6}\int_1^2 [12x^2y - 3xy^2 - 2y^3 \Big|_{-2x+4}^{x+1} dx \;=$$

$$\frac{1}{6}\int_1^2 \{12x^2(x+1) - 3x(x+1)^2 - 2(x+1)^3 - [12x^2(-2x+4) - 3x(-2x+4)^2 - 2(-2x+4)^3]\}\, dx$$

$$\frac{1}{6}\int_1^2 [12x^2(x+1) - 3x(x+1)^2 - 2(x+1)^3 + 12x^2(2x-4) + 3x(2x-4)^2 - 2(2x-4)^3]\, dx$$

$$\frac{1}{6}\int_1^2 \{12x^2(x+1+2x-4) - 3x[(x+1)^2 - (2x-4)^2] - 2[(x+1)^3 + (2x-4)^3]\}\, dx$$

$$\frac{1}{6}\int_1^2 [12x^2(3x-3) - 3x(x^2+2x+1-4x^2+16x-16) - 2(x^3+3x^2+3x+1+8x^3-48x^2+96x-64)]\, dx$$

$$\frac{1}{6}\int_1^2 [36x^2(x-1) - 3x(-3x^2+18x-15) - 2(9x^3-45x^2+99x-63)]\, dx$$

$$\frac{1}{6}\int_1^2 (36x^3 - 36x^2 + 9x^3 - 54x^2 + 45x - 18x^3 + 90x^2 - 198x + 126)\, dx$$

$$\frac{1}{6}\int_1^2 (27x^3 - 153x + 126)\, dx \;=\; \frac{1}{6}\left[\frac{27x^4}{4} - \frac{153x^2}{2} + 126x\right|_1^2 \;=\; -\frac{3}{8}$$

$$\int_2^3 \int_{x-2}^{-2x+7} (2x^2 - xy - y^2)\, dydx \quad = \quad \int_2^3 \left[2x^2y - \frac{xy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right|_{x-2}^{-2x+7} dx \ =$$

$$= \frac{1}{6}\int_2^3 [12x^2y - 3xy^2 - 2y^3 \Big|_{x-2}^{-2x+7} dx \ =$$

$$\frac{1}{6}\int_2^3 \{12x^2(-2x+7) - 3x(-2x+7)^2 - 2(-2x+7)^3 - [12x^2(x-2) - 3x(x-2)^2 - 2(x-2)^3]\}\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_2^3 [-12x^2(2x-7) - 3x(2x-7)^2 + 2(2x-7)^3 - 12x^2(x-2) + 3x(x-2)^2 + 2(x-2)^3]\, dx \ =$$

$$= \frac{1}{6}\int_2^3 \{-12x^2(2x-7+x-2) - 3x[(2x-7)^2 - (x-2)^2] + 2[(2x-7)^3 + (x-2)^3]\}\, dx \ =$$

$$\frac{1}{6}\int_2^3 [-12x^2(3x-9) - 3x(4x^2 - 28x + 49 - x^2 + 4x - 4) + 2(8x^3 - 84x^2 + 294x - 343 + x^3 - 6x^2 + 12x - 8)]\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_2^3 [-36x^2(x-3) - 3x(3x^2 - 24x + 45) + 2(9x^3 - 90x^2 + 306x - 351)]\, dx \ =$$

$$= \frac{1}{6}\int_2^3 (-36x^3 + 108x^2 - 9x^3 + 72x^2 - 135x + 18x^3 - 180x^2 + 612x - 702)\, dx \ =$$

$$= \frac{1}{6}\int_2^3 \{-27x^3 + 477x - 702\}\, dx \ = \ -\frac{1}{6}\int_2^3 \{27x^3 - 477x + 702\}\, dx \ =$$

$$= -\frac{1}{6}\left[\frac{27x^4}{4} - \frac{477x^2}{2} + 702x \right|_2^3 = -\frac{1}{24}[27x^4 - 954x^2 + 2808x \Big|_2^3$$

$$= -\frac{1}{24}[2025 - 2232] \ = \ 8\tfrac{5}{8} \quad => \quad -\tfrac{3}{8} + 8\tfrac{5}{8} \ = \ 8\tfrac{1}{4} \ \ (\textit{easier with Jacobian})$$