נגזרות כיווניות וגראדיינטים

נגזרות כיווניות במישור

אם $f_{(x,y)}$ דיפרנציאבילית, הקצב שבו היא משתנה לפי t לאורך עקום דיפרנציאבילי $x = g_{(t)}\ ,\ y = h_{(t)}$ הינו:

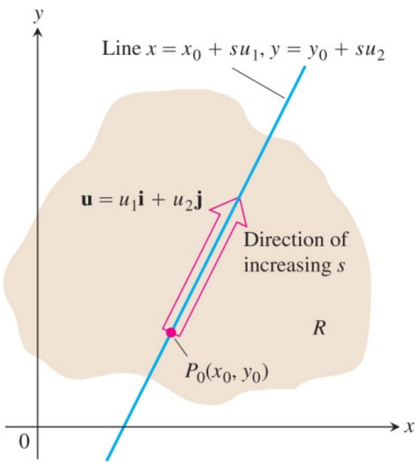
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

משוואה זו מתארת את הקצב שבו משתנה f לפי t, בכל נקודה $P_0(x_0\ ,\ y_0) = P_0\left[g_{(t_0)}\ ,\ h_{(t_0)}\right]$ שעל העקום, ולכן היא תלויה (בין היתר) בכיוון התנועה שהעקום מתווה. שימו לב לכך ש- t אינו מייצג זמן בהכרח.

אם העקום הינו קו ישר ו- t מייצג אורך קטע שעליו, מנקודה P_0 בכיוון ווקטור יחידה נתון $\hat{u}$, אזי $\frac{df}{dt}$ הוא קצב השינוי של f לפי מרחק, בכיוון $\hat{u}$. ע"י שינוי $\hat{u}$, אנו מגלים את הקצבים שבהם משתנה f לפי מרחק כשנעים דרך P_0 בכיוונים שונים.

נגדיר זאת עכשיו באופן מדויק יותר:
נניח ש- $f_{(x,y)}$ מוגדרת בתחום R שבמישור xy, ש- $P_0(x_0\ ,\ y_0)$ היא נקודה ב- R, וש- $\hat{u} = \mathbf{u_1 i} + \mathbf{u_2 j}$ הינו ווקטור יחידה.
או אז, המשוואות הפרמטריות $x = x_0 + su_1 \quad , \quad y = y_0 + su_2$
מייצגות ישר העובר ב- P_0 ומקביל ל- $\hat{u}$.
אם הפרמטר s מייצג מרחק מ- P_0 בכיוון $\hat{u}$, אנו מוצאים את קצב השינוי של f בכיוון $\hat{u}$ בנקודה P_0, באמצעות חישוב $\frac{df}{ds}$ ב- P_0.

באיור שמשמאל: קצב השינוי של f בכיוון $\hat{u}$ בנקודה P_0 הוא הקצב שבו משתנה f לאורך הקו הכחול, בנקודה P_0.

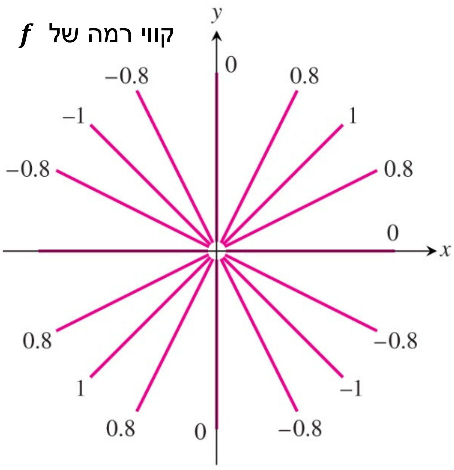


לשם המחשה, נשוב לדוגמה שהובאה בפרק "גבולות ורציפות".
באיור העליון משמאל מוצגים קווי רמה של הפונקציה $f_{(x,y)} = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.
ליד כל קו רמה רשום קו הקונטור (הערך של f) המתאים לו.
כל עוד נעים על פני גרף הפונקציה לאורך קו קונטור,
היא אינה משתנה כי היא שומרת על גובה (z) קבוע.

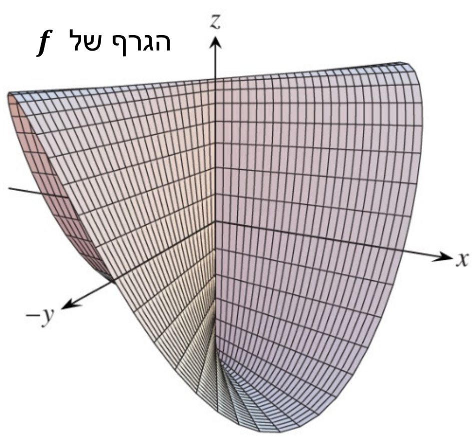
באיור התחתון משמאל מוצג הגרף של f.
כשנעים על הגרף של f לאורך קו קונטור, כאמור, ערך הפונקציה נותר קבוע.
אם סוטים מקו הקונטור, ערך הפונקציה משתנה.
אם הסטייה קלה, הפונקציה משתנה בקצב איטי,
גם אם מהירות התנועה גבוהה יחסית.
ככל שגדולה יותר הסטייה, גדול יותר הקצב שבו משתנה ערך הפונקציה.
כשכיוון התנועה מאונך לקו הקונטור, משתנה ערך הפונקציה בקצב מרבי.

אם נצביע על כיוון התנועה באמצעות ווקטור היחידה $\hat{u}$, נוכל לסובבו בהדרגה כדי לגלות את הכיוון שבו הפונקציה משתנה בקצב הגבוה ביותר.
"להפתעתנו" נגלה שכיוון זה מאונך תמיד לקו הקונטור.

קווי רמה של f



הגרף של f



הגדרה: נגזרת כיוונית

הנגזרת של f ב- $P_0(x_0\,,\,y_0)$ בכיוון ווקטור היחידה $\hat{u}=\mathbf{u_1 i}+\mathbf{u_2 j}$ היא המספר

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\hat{u},P_0}=\lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1\ ,\ y_0+su_2)-f(x_0\,,\,y_0)}{s}$$

בהינתן שהגבול קיים

דוגמה מהספר (עמ' 1007): מציאת נגזרת כיוונית תוך שימוש בהגדרה.

מצא את הנגזרת של $f_{(x,y)}=x^2+xy$ ב- $P_0(1\,,2)$ בכיוון של ווקטור היחידה $\hat{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{j}$.

פיתרון:

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\hat{u},P_0}=\lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1\ ,\ y_0+su_2)-f(x_0\,,\,y_0)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{f\left(1+s\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ 2+s\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-f(1\,,2)}{s}=$$

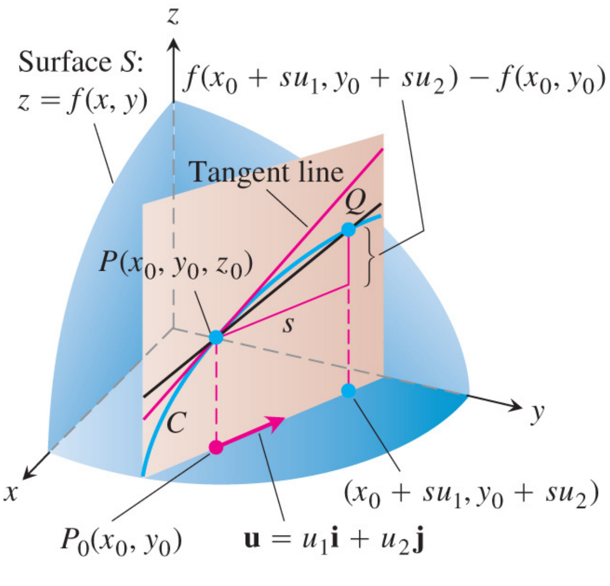
$$=\lim_{s\to 0}\frac{\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(2+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)-(1^2+1\cdot 2)}{s}\cdot\frac{2}{2}=\lim_{s\to 0}\frac{(\sqrt{2}+s)^2+(\sqrt{2}+s)(2\sqrt{2}+s)-6}{2s}=$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{(\sqrt{2}+s)[\sqrt{2}+s+2\sqrt{2}+s]-6}{2s}=\lim_{s\to 0}\frac{(s+\sqrt{2})[2s+3\sqrt{2}]-6}{2s}=\lim_{s\to 0}\frac{2s^2+5\sqrt{2}\cdot s+6-6}{2s}=$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{2s+5\sqrt{2}}{2}=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

ובכן, קצב השינוי של $f_{(x,y)}=x^2+xy$ ב- $P_0(1\,,2)$ בכיוון $\hat{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{j}$ הוא $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

פרשנות לנגזרת הכיוונית



המשוואה $z=f_{(x,y)}$ מייצגת משטח S במרחב.

אם $z_0=f_{(x_0,y_0)}$, אז הנקודה $P(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ נמצאת על S.

המישור האנכי אשר עובר ב- P וב- $P_0(x_0\,,y_0)$ והמקביל ל- $\vec{u}$,

חותך את S לאורך העקום C.

שיפוע המשיק ל- C בנקודה P הוא קצב השינוי של f בכיוון $\vec{u}$.

כאשר $\vec{u}=\mathrm{i}$, הנגזרת הכיוונית ב- P_0 היא $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$.

כאשר $\vec{u}=\mathrm{j}$, הנגזרת הכיוונית ב- P_0 היא $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$.

הנגזרת הכיוונית מכלילה את שתי הנגזרות החלקיות הנ"ל, כך שאנו יכולים לחשב את קצב השינוי של f **בכל כיוון שהוא.**

פרשנות פיזיקאלית לנגזרת כיוונית

נניח ש- $T=f_{(x,y)}$ היא הטמפרטורה בכל נקודה $(x\,,y)$ שבמישור. או אז, $f_{(x_0\,,\,x_0)}$ היא הטמפרטורה בנקודה $P_0(x_0\,,y_0)$ ו- $\left(\frac{df}{ds}\right)_{\hat{u},P_0}$ הינו קצב השינוי המיידי של הטמפרטורה ב- P_0 בהתקדמנו בכיוון $\vec{u}$.

חישובים וגראדיינטים

נפתח כעת נוסחה יעילה לחישוב הנגזרת הכיוונית של פונקציה גזירה f .

אנו מתחילים בישר $y = y_0 + su_2$, $x = x_0 + su_1$, אשר עובר בנקודה $P_0(x_0 , y_0)$.

שימו לב לכך ש- $\frac{dx}{ds} = u_1$ ושי- $\frac{dy}{ds} = u_2$, נשתמש בכך עוד רגע.

אנו זוכרים שהפרמטר s מייצג מרחק מ- P_0 בכיוון וקטור היחידה $\hat{u} = u_1 i + u_2 j$, ואם כך

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\hat{u},P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\frac{dy}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\cdot u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\cdot u_2 = \left[\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} i + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} j}_{\text{הגרדיינט של } f \text{ ב- } P_0}\right]\cdot \underbrace{[u_1 i + u_2 j]}_{\text{כיוון } \hat{u}}$$

<u>הגדרה</u>: וקטור גרדיינט

וקטור הגרדיינט של $f_{(x,y)}$ בנקודה $P_0(x_0 , y_0)$ הוא הווקטור

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$$

אשר מתקבל מחישוב הנגזרות החלקיות של f ב- P_0 .

אם כך, המשוואה שלעיל אומרת בעצם שהנגזרת של f בכיוון $\hat{u}$ בנקודה P_0 , היא המכפלה הסקאלארית של $\hat{u}$ ושל הגרדיינט של f ב- P_0 .

תיאורמה 9: **הנגזרת הכיוונית היא מכפלה סקאלארית**

אם $f_{(x,y)}$ גזירה באיזור פתוח אשר מכיל את הנקודה $P_0(x_0 , y_0)$, אז

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\hat{u},P_0} = \left(\vec{\nabla} f\right)_{P_0}\cdot \hat{u}$$

המכפלה הסקאלארית של $\hat{u}$ ושל הגרדיינט של f ב- P_0 .

דוגמה מהספר (עמ' 1009) – מציאת הנגזרת הכיוונית באמצעות הגרדיינט.

מצא את הנגזרת של $f_{(x,y)} = xe^y + cos(xy)$ בנקודה $(2\,,0)$ בכיוון של $\vec{v} = 3i - 4j$.

כיוונו של $\vec{v}$ מתקבל מחילוקו באורכו :

$$\hat{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}}{5} = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$$

הנגזרות החלקיות של f רציפות בכל מקום, וב- $(2\,,0)$ הינן

$$f_{x(2,0)} = e^y - ysin(xy)\Big|_{(2\,,0)} = e^0 - 0sin(0) = 1$$

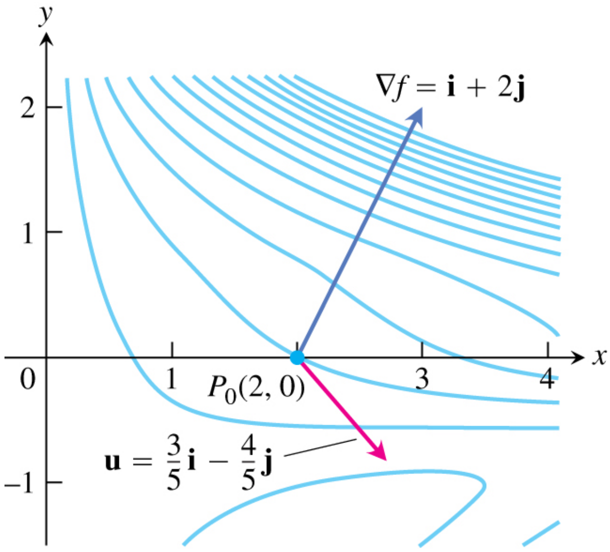
$$f_{y(2,0)} = xe^y - xsin(xy)\Big|_{(2\,,0)} = 2 - 2sin(0) = 2$$

הגרדיינט של f ב- $(2\,,0)$ הינו

$$\left(\vec{\nabla} f\right)_{(2\,,0)} = f_{x(2,0)}i + f_{y(2,0)}j = i + 2j$$

הנגזרת של f ב- $(2\,,0)$ בכיוון של $\vec{v}$ היא אם כך

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\hat{u},(2\,,0)} = \left(\vec{\nabla} f\right)_{(2\,,0)} \cdot \hat{u} = (i + 2j) \cdot \left(\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j\right) = -1$$



נתאר את $\vec{\nabla} f$ (חץ כחול) כווקטור בתחום של f .

בכיוונו גדלה f בקצב הגבוה ביותר.

בנקודה $(2\,,0)$, הנמצאת על קו הרמה $f = 3$,

קצב השינוי של f בכיוון $\hat{u}$ (חץ אדום) הינו **-1** .

חישוב המכפלה הסקאלארית באמצעות הנוסחה $\left(\frac{df}{ds}\right)_{\hat{u},P_0} = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u} = \left|\vec{\nabla} f\right| |\hat{u}| \cos\theta = \left|\vec{\nabla} f\right| \cos\theta$ כאשר θ היא הזווית שבין הוקטורים $\hat{u}$ ו- $\vec{\nabla} f$, חושף את התכונות הבאות.

תכונות הנגזרת הכיוונית $\left(\frac{df}{ds}\right)_{\hat{u},P_0} = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u} = \left|\vec{\nabla} f\right| \cdot \cos\theta$

1. הפונקציה f גדלה הכי מהר כאשר $\cos\theta = 1$ או במילים אחרות, כאשר $\hat{u}$ בכיוון $\vec{\nabla} f$.
ז"א, כיוון וקטור הגרדיינט בנקודה P_0 שבתחום ההגדרה של f הוא הכיוון שבו f גדלה הכי מהר .
הנגזרת בכיוון זה הינה $\left(\frac{df}{ds}\right)_{\hat{u},P_0} = \left|\vec{\nabla} f\right| \cdot \cos 0 = \left|\vec{\nabla} f\right|$.

2. הפונקציה f קטנה הכי מהר כאשר $\cos\theta = -1$ או במילים אחרות, כאשר כיוונו של $\hat{u}$ הפוך לזה של $\vec{\nabla} f$.
הנגזרת בכיוון זה הינה $\left(\frac{df}{ds}\right)_{\hat{u},P_0} = \left|\vec{\nabla} f\right| \cdot \cos(\pi) = -\left|\vec{\nabla} f\right|$.

3. בכל כיוון $\hat{u}$ אשר מאונך לגרדיינט $\vec{\nabla} f \neq 0$ הפונקציה אינה משתנה, מפני שאז $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\hat{u},P_0} = \left|\vec{\nabla} f\right| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

דוגמה מהספר (עמ' 1010) – מציאת כיוון ההשתנות המרבית, כיוון ההשתנות המזערית, והכיוון שבו אין שינוי.

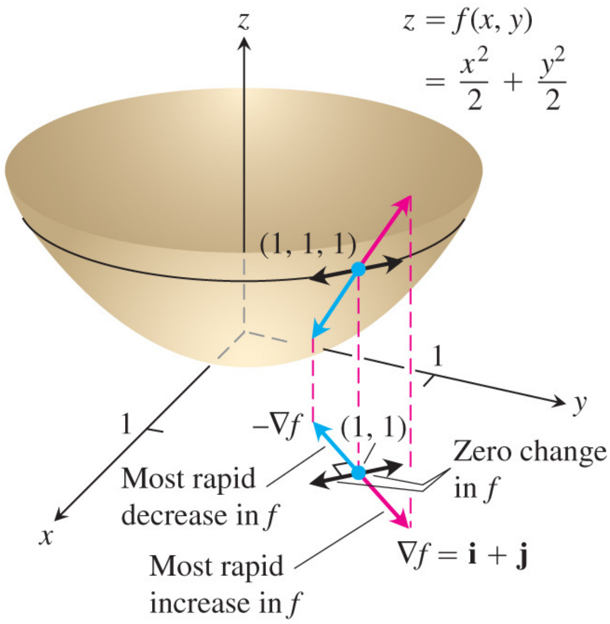
מצא את הכיוונים שבהם $f_{(x,y)} = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$

א. גדלה בקצב הכי מהיר בנקודה $(1\,,1)$

ב. קטנה בקצב הכי מהיר בנקודה $(1\,,1)$

ג. מהם הכיוונים שבהם f אינה משתנה בנקודה $(1\,,1)$?

פיתרון:



א. הפונקציה גדלה בקצב הכי מהיר בכיוון $\vec{\nabla} f$ בנקודה $(1\,,1)$. הגרדיינט בנקודה זו הינו

$$(\vec{\nabla} f)_{(1\,,1)} = f_{x(1,1)} i + f_{y(1,1)} j = (xi + yj)_{(1,1)} = i + j$$

$$\hat{u} = \frac{i+j}{|i+j|} = \frac{i+j}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j$$

ב. הפונקציה קטנה בקצב הכי מהיר בכיוון $-\vec{\nabla} f$ בנקודה $(1\,,1)$.

כיוון זה הוא $-\hat{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}} i - \frac{1}{\sqrt{2}} j$

ג. הכיוונים שבהם f אינה משתנה בנקודה $(1\,,1)$ הם הכיוונים המאונכים ל- $\vec{\nabla} f$:

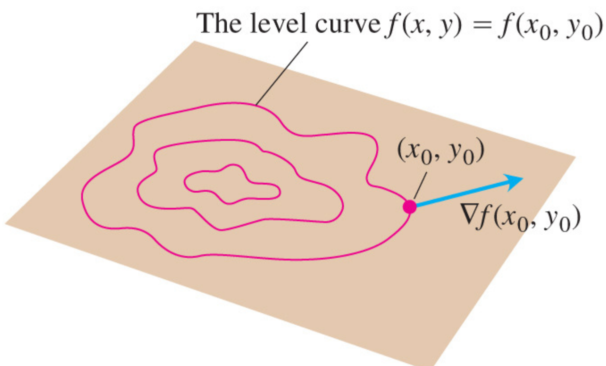
$$\hat{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j \quad and \quad -\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} i - \frac{1}{\sqrt{2}} j$$

<u>גרדיינטים ומשיקים לקווי רמה</u>

אם לפונקציה גזירה $f_{(x,y)}$ יש ערך קבוע לאורך עקום חלק $\vec{r} = g_{(t)} i + h_{(t)} j$ (קו רמה של f), אז $f_{[g_{(t)}\,,h_{(t)}]} = c$. גזירת שני אגפי המשוואה הזו לפי t מניבה את המשוואות

$$\frac{d}{dt} f_{[g_{(t)}\,,h_{(t)}]} = \frac{d}{dt}(c) \quad => \quad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} = 0 \quad => \quad \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j\right)}_{\vec{\nabla} f} \cdot \underbrace{\left(\frac{dg}{dt} i + \frac{dh}{dt} j\right)}_{\frac{d\vec{r}}{dt}} = 0$$

משוואה זו אומרת ש- $\vec{\nabla} f$ מאונך לווקטור המשיק $\frac{d\vec{r}}{dt}$, ז"א $\vec{\nabla} f$ מאונך לעקום.



בכל נקודה (x_0, y_0) שבתחום ההגדרה של פונקציה גזירה $f_{(x,y)}$, הגרדיינט של f מאונך לקו הרמה אשר עובר ב- (x_0, y_0).

התמונה שמשמאל מציגה זאת – הגרדיינט של פונקציה גזירה של שני משתנים בנקודה, מאונך תמיד לקו הרמה העובר בנקודה.

מסיבה זו נוטים המים לזרום במאונך לקווי הקונטור שבמפות הטופוגרפיות. כדי להגיע ליעדם בדרך המהירה ביותר, עליהם לזרום כנגד הגרדיינט של פונקצית הגובה, ז"א בכיוון שבו הגובה פוחת בקצב הגבוה ביותר.