

מהו השינוי בפונקציה $f(x,y,z) = x + x\cos z - y\sin z + y$ כאשר זזים מהנקודה $p_0(2,-1,0)$ מרחק של $ds = 0.2$ אל הנקודה $p_1(0,1,2)$? תשובה: יחידות של f .

$$f_{(x,y,z)} = x + x\cos z - y\sin z + y$$

מדובר כאן בפונקציה התלויה במיקום מרחבי (x, y, z) . טמפרטורה למשל, או לחות.

ראשית נמצא את נוסחת הגרדיאנט של $f_{(x,y,z)}$:

$$\vec{\nabla} f_{(x,y,z)} = (1 + \cos z)\hat{x} - (\sin z - 1)\hat{y} - (x\sin z + y\cos z)\hat{z}$$

נחשב כעת את הגרדיאנט בנקודה שממנה זזים:

$$\vec{\nabla} f_{(2,-1,0)} = (1 + \cos 0)\hat{x} - (\sin 0 - 1)\hat{y} - (2\sin 0 - \cos 0)\hat{z} = 2\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$$

כעת נחשב את הווקטור \vec{A} אשר זנבו בנקודה שממנה זזים וראשו בנקודה שכלפיה נעים:

$$\vec{A} = (0, 1, 2) - (2, -1, 0) = (0 - 2)\hat{x} + (1 + 1)\hat{y} + (2 - 0)\hat{z} = -2\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z}$$

כדי לקבל ווקטור יחידה \hat{A} (ווקטור כיוון), ננרמל את הווקטור \vec{A} באמצעות חילוקו בגודלו $|\vec{A}|$:

$$|\vec{A}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12}$$

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{-2\hat{x} + 2\hat{y} + 2\hat{z}}{\sqrt{12}} = -\frac{2}{\sqrt{12}}\hat{x} + \frac{2}{\sqrt{12}}\hat{y} + \frac{2}{\sqrt{12}}\hat{z}$$

\hat{A} הוא הכיוון שבו זזים מהנקודה $(2, -1, 0)$.

מכפלה סקלרית של הגרדיאנט בווקטור הכיוון תניב את הנגזרת הכיוונית של f בכיוון \hat{A} :

$$\vec{\nabla} f_{(2,-1,0)} \cdot \hat{A} = (2\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{12}}\hat{x} + \frac{2}{\sqrt{12}}\hat{y} + \frac{2}{\sqrt{12}}\hat{z}\right) = -\frac{4}{\sqrt{12}} + \frac{2}{\sqrt{12}} + \frac{2}{\sqrt{12}} = 0$$

הווקטור \hat{A} מאונך לווקטור הגרדיאנט!

תזוזה אינפיניטסימאלית קטנה מהנקודה $(2, -1, 0)$ בכיוון \hat{A} מותירה את הפונקציה f ללא שינוי.

התזוזה המבוקשת $ds = 0.2$ אינה אינפיניטסימאלית קטנה, ולכן אל לנו לצפות ל- $\Delta f = 0$ במציאות.