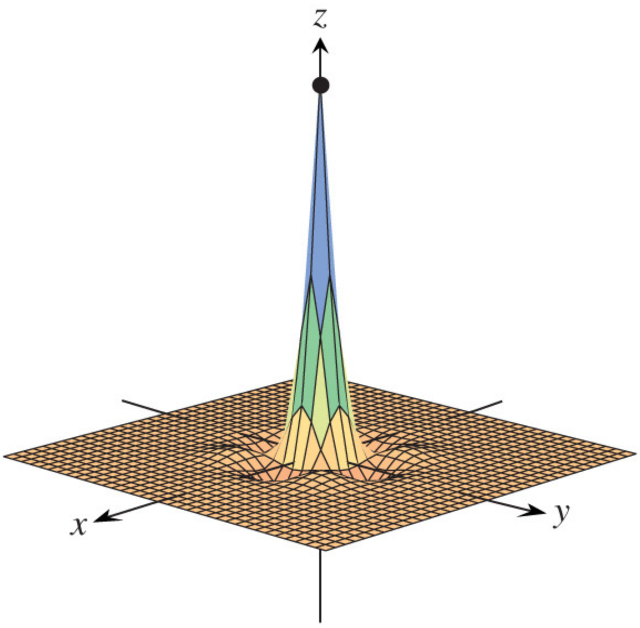
נקודות קיצון ואוכף

פונקציות רציפות של שני משתנים אמורות לקבל ערכי קיצון בתחומי הגדרה סגורים ומתוחמים.
בפרק זה נראה שאפשר למקד את החיפוש אחר ערכי הקיצון ע"י התבוננות בנגזרותיה החלקיות הראשונות של הפונקציה.
פונקציה של שני משתנים יכולה לקבל ערכי קיצון רק בנקודות שעל גבול תחום ההגדרה שלה, או בנקודות שבפנים תחום ההגדרה שלה אשר בהן מתאפסות שתי נגזרותיה החלקיות הראשונות (או שאחת מהן או שתיהן אינן קיימות).
בכל מקרה, התאפסותן של נגזרות בנקודה פנימית $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ אינה מעידה בהכרח על היותה נקודת קיצון.
המשטח המהווה את גרף הפונקציה יכול לקבל צורה של אוכף ממש מעל $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, תוך שהוא חותך שם את המישור המשיק.



בתוך האזור הרבוע $|\boldsymbol{y}| \le \frac{3\pi}{2}$, $|\boldsymbol{x}| \le \frac{3\pi}{2}$,

יש לפונקציה $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{cosx})(\boldsymbol{cosy})\boldsymbol{e}^{-\sqrt{x^2+y^2}}$

ערך מקסימאלי של 1 וערך מינימאלי של -0.067 .

מבחני נגזרת למציאת ערכי קיצון מקומיים

כדי למצוא ערכי קיצון מקומיים של **פונקציה של משתנה יחיד**, אנו תרים אחר נקודות שבהן **הישר המשיק לגרף** הינו אופקי.
בנקודות אלה אנו מחפשים אז מקסימום מקומי, מינימום מקומי ונקודות פיתול.
בפונקציה $\boldsymbol{f}_{(x,y)}$ **של שני משתנים**, אנו תרים אחר נקודות שבהן **המישור המשיק למשטח הגרף** הינו אופקי.
בנקודות אלה אנו מחפשים אז מקסימום מקומי, מינימום מקומי ונקודות אוכף.

הגדרות: מקסימום מקומי, מינימום מקומי

תהי $\boldsymbol{f}_{(\mathbf{x,y})}$ מוגדרת באזור **R** אשר מכיל את הנקודה $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$. או אז

1) $\boldsymbol{f}_{(\mathbf{a,b})}$ הינו ערך **מקסימום מקומי** של $\boldsymbol{f}$, אם $\boldsymbol{f}_{(\mathbf{x,y})} \le \boldsymbol{f}_{(\mathbf{a,b})}$ לכל נקודה $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ שבתוך דסקה פתוחה שמרכזה $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

2) $\boldsymbol{f}_{(\mathbf{a,b})}$ הינו ערך **מינימום מקומי** של $\boldsymbol{f}$, אם $\boldsymbol{f}_{(\mathbf{a,b})} \le \boldsymbol{f}_{(\mathbf{x,y})}$ לכל נקודה $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ שבתוך דסקה פתוחה שמרכזה $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

מקסימום מקומי מתייחס לשיאה של פסגה במשטח $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}_{(\mathbf{x,y})}$,

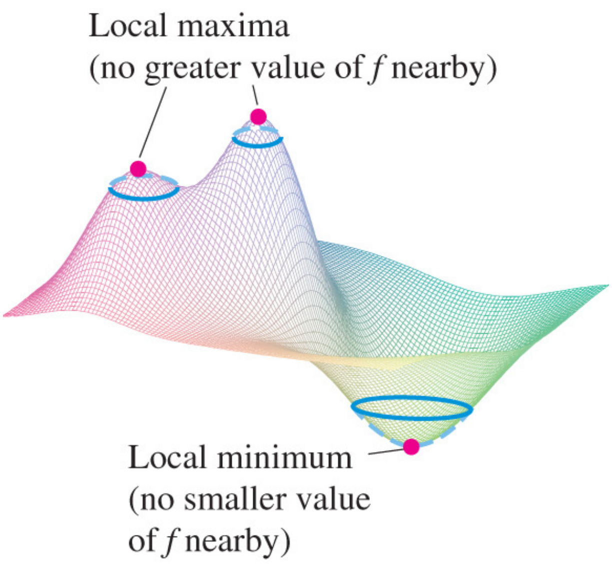
ומינימום מקומי מתייחס לתחתיתו של שקע.

בנקודות שכאלה, המישורים המשיקים למשטח (במידה שהם

קיימים) הינם אופקיים.

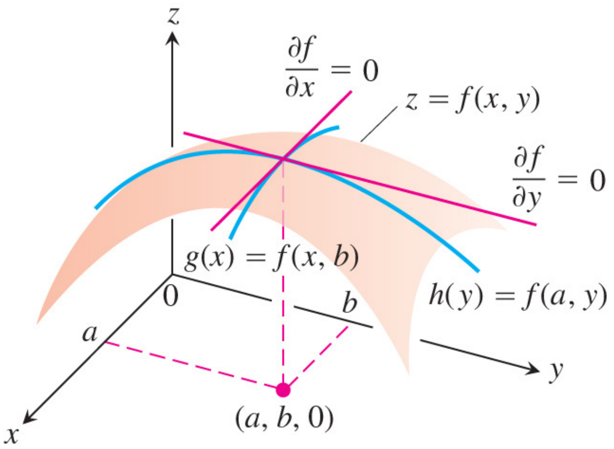
כמו בפונקציות של משתנה יחיד, המפתח לזיהוי של נקודות

קיצון הוא מבחן של נגזרת ראשונה.



תיאורמה 10 – מבחן הנגזרת הראשונה לערכי קיצון מקומיים

אם ל- $\boldsymbol{f_{(x,y)}}$ יש ערך קיצון מקומי בנקודה פנימית $(\boldsymbol{a,b})$ של תחום ההגדרה, ואם הנגזרות החלקיות הראשונות קיימות שם, אז $\boldsymbol{f_{x(a,b)}=0}$ ו- $\boldsymbol{f_{y(a,b)}=0}$.



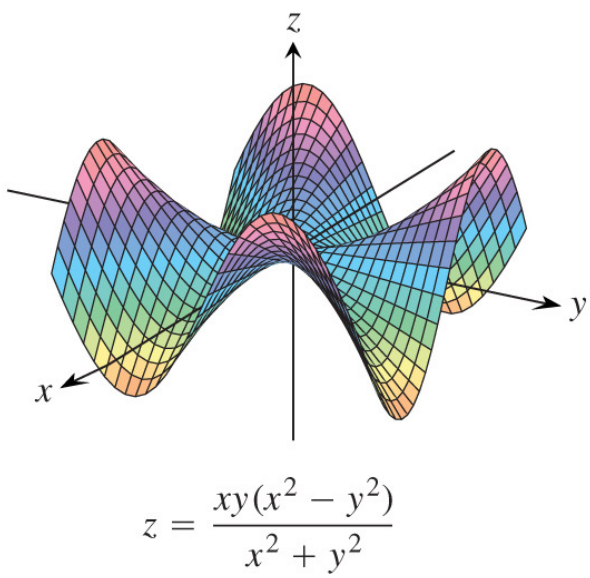
תיאורמה 10 באיור שמשמאל.

אם ישנו מקסימום (או מינימום) מקומי

של $\boldsymbol{f}$ ב- $\boldsymbol{y=b}$, $\boldsymbol{x=a}$

אז הנגזרות החלקיות הראשונות

$\boldsymbol{f_{x(a,b)}}$ ו- $\boldsymbol{f_{y(a,b)}}$ מתאפסות שתיהן.

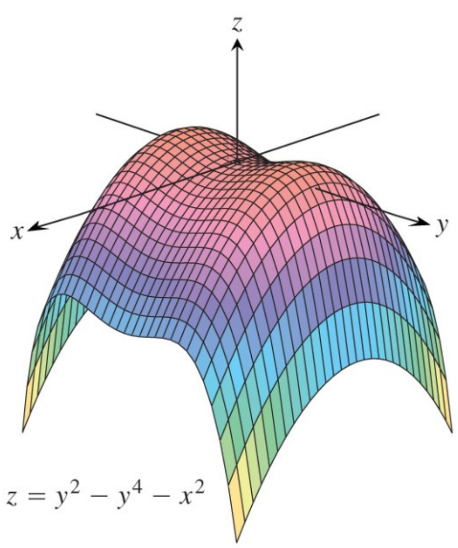


הגדרה – **נקודה קריטית**

נקודה פנימית בתחום ההגדרה של פונקציה $\boldsymbol{f_{(x,y)}}$
אשר בה מתאפסות $\boldsymbol{f_x}$ ו- $\boldsymbol{f_y}$ (או שמי מהן אינה
קיימת) היא נקודה קריטית של f .

מתיאורמה 10 משתמע שהמישור המשיק למשטח הפונקציה
בנקודת קיצון מקומי (אם ישנו מישור כזה) הוא אכן אופקי.
עוד משתמע ממנה, שרק בנקודות קריטיות או בנקודות שעל
גבול תחום ההגדרה (Boundary Points) יתכן ערך קיצון.

בפונקציה גזירה של **משתנה יחיד**, כזכור, נקודה קריטית אינה מעידה בהכרח על קיצון מקומי. היא יכולה להוות נקודת פיתול.
באופן דומה, בפונקציה גזירה של **שני משתנים** נקודה קריטית יכולה להוות **נקודת אוכף**.



הגדרה – **נקודת אוכף**

לפונקציה גזירה $\boldsymbol{f_{(x,y)}}$ יש נקודת אוכף בנקודה קריטית $(\boldsymbol{a,b})$,

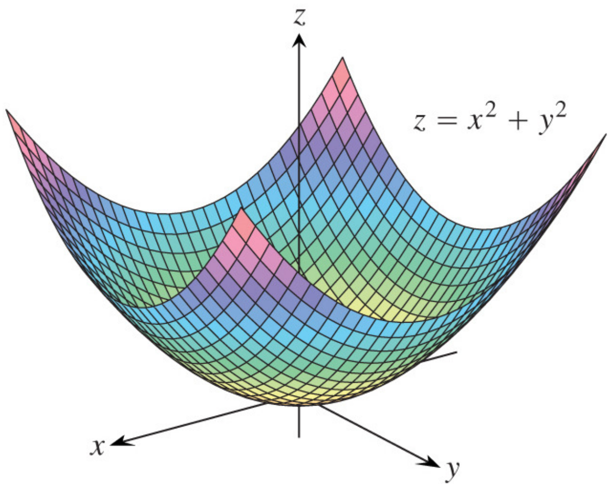
אם בכל דסקה פתוחה שמרכזה $(\boldsymbol{a,b})$ ישנן הן נקודות $(\boldsymbol{x,y})$

שבתחום ההגדרה אשר בהן $\boldsymbol{f_{(a,b)}\le f_{(x,y)}}$, והן נקודות

$(\boldsymbol{x,y})$ שבתחום ההגדרה אשר בהן $\boldsymbol{f_{(x,y)}\le f_{(a,b)}}$.

הנקודה המתאימה $\left(\boldsymbol{a,b,f_{(a,b)}}\right)$ על המשטח $\boldsymbol{z=f_{(x,y)}}$

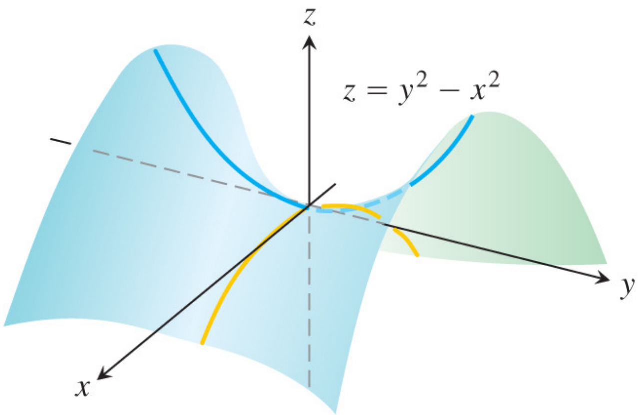
נקראת **נקודת אוכף** של המשטח.



דוגמה מהספר (עמ' 1029) – מציאת ערכי קיצון מקומיים.

מצא את ערכי הקיצון המקומיים של $f_{(x,y)} = x^2 + y^2$.

פיתרון: תחום ההגדרה של f הוא המישור כולו (אין Boundary Points) כך שהנגזרות החלקיות f_x ו- f_y קיימות בכל מקום. אם כך, ערכי קיצון מקומיים יכולים להתקבל רק כאשר $f_x = 2x = 0$ ו- $f_y = 2y = 0$, היינו בראשית.
מדובר כאן במינימום מקומי אשר יכולנו לצפותו מראש, כי בראשית $f = 0$ ובכל נקודה אחרת היא חיובית.



דוגמה מהספר (עמ' 1029) – זיהוי נקודת אוכף.
מצא את ערכי הקיצון המקומיים של $f_{(x,y)} = y^2 - x^2$.

פיתרון: תחום ההגדרה של f הוא המישור כולו (אין Boundary Points) כך שהנגזרות החלקיות f_x ו- f_y קיימות בכל מקום. אם כך, ערכי קיצון מקומיים יכולים להתקבל רק כאשר $f_x = -2x = 0$ ו- $f_y = 2y = 0$, היינו בראשית.
אולם, לאורך ציר x החיובי f שלילית, $f_{(x,0)} = -x^2 < 0$,
ולאורך ציר y החיובי f חיובית, $f_{(0,y)} = y^2 > 0$.
אם כך, כל דסקה פתוחה שמרכזה $(0,0)$ מכילה נקודות שבהן הפונקציה חיובית, ונקודות שבהן הפונקציה שלילית.
לפונקציה יש **נקודת אוכף** בראשית, ולא ערך קיצון מקומי.
אנו מסיקים כי לפונקציה אין ערכי קיצון מקומיים.

התאפסותן של הנגזרות החלקיות f_x ו- f_y בנקודה פנימית (a,b) של R, אינה מבטיחה של- f ישנו ערך קיצון מקומי שם.
על כל פנים, אם f ונגזרותיה החלקיות הראשונות והשניות רציפות על פני R, אנו יכולים להשתמש בתיאורמה שלהלן.

תיאורמה 11 – מבחן הנגזרת השנייה לערכי קיצון מקומיים

נניח ש- $f_{(x,y)}$ ונגזרותיה החלקיות הראשונות והשניות רציפות על פני דסקה פתוחה שמרכזה (a,b), וש- $f_{x(a,b)} = f_{y(a,b)} = 0$. או אז,

1) ל- f יש מקסימום מקומי ב- (a,b) אם $f_{xx} < 0$ ו- $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 > 0$ ב- (a,b) .
2) ל- f יש מינימום מקומי ב- (a,b) אם $f_{xx} > 0$ ו- $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 > 0$ ב- (a,b) .
3) ל- f יש נקודת אוכף ב- (a,b) אם $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 < 0$ ב- (a,b) .
4) המבחן אינו חד משמעי ב- (a,b) אם $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = 0$ ב- (a,b) .

הביטוי $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2$ נקרא הדיסקרימיננטה של f . קל לזכור אותה כדטרמיננטה $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$.
תיאורמה 11 אומרת בעצם שאם הדיסקרימיננטה **חיובית** בנקודה (a,b) אז המשטח מתעקם באותו האופן בכל הכיוונים:
כלפי מטה אם $f_{xx} < 0$ (כך שמתקבל מקסימום מקומי) או כלפי מעלה אם $f_{xx} > 0$ (כך שמתקבל מינימום מקומי).
לעומת זאת, אם הדיסקרימיננטה **שלילית** בנקודה (a,b) אז בכיוונים מסוימים המשטח מתעקם כלפי מטה ובכיוונים אחרים הוא מתעקם כלפי מעלה. כתוצאה מכך מתקבלת נקודת אוכף.

דוגמה מהספר (עמ' 1030) – מציאת ערכי קיצון מקומיים.

מצא את ערכי הקיצון המקומיים של הפונקציה $f_{(x,y)} = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$.

פיתרון: תחום ההגדרה של f הוא המישור כולו (אין Boundary Points) כך שהנגזרות החלקיות f_x ו- f_y קיימות בכל מקום.

אם כך, ערכי קיצון מקומיים יכולים להתקבל רק כאשר $f_x = y - 2x - 2 = 0$ ו- $f_y = x - 2y - 2 = 0$,

ז"א כאשר $x = y = -2$. הנקודה $(-2,-2)$ מהווה אם כן נקודה קריטית של f , וכדי לדעת אם מדובר בקיצון מקומי נחשב

$$f_{xx} = -2 \quad , \quad f_{yy} = -2 \quad , \quad f_{xy} = 1$$

הדיסקרימיננטה של f ב- $(-2,-2)$ הינה $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = 3 > 0$

דיסקרימיננטה חיובית, אז המשטח מתעקם באותו האופן בכל הכיוונים. באיזה אופן?

כלפי מטה, כי ב- $(-2,-2)$ קיבלנו $f_{xx} = -2 < 0$.

אם כך, ל- f יש מקסימום מקומי ב- $(-2,-2)$.

ערכה של f בנקודה זו הוא $f_{(-2,-2)} = 8$. זהו הערך הגבוה ביותר ש- f מקבלת.

דוגמה מהספר (עמ' 1031) – מציאת ערכי קיצון מקומיים.

מצא את ערכי הקיצון המקומיים של $f_{(x,y)} = xy$.

פיתרון: תחום ההגדרה של f הוא המישור כולו (אין Boundary Points) כך שהנגזרות החלקיות f_x ו- f_y קיימות בכל מקום. אם כך, ערכי קיצון מקומיים יכולים להתקבל רק כאשר $f_x = y = 0$ ו- $f_y = x = 0$, היינו בראשית.

הנקודה $(0,0)$ מהווה נקודה קריטית של f .

כדי לדעת אם מדובר בקיצון מקומי או באוכף, נחשב

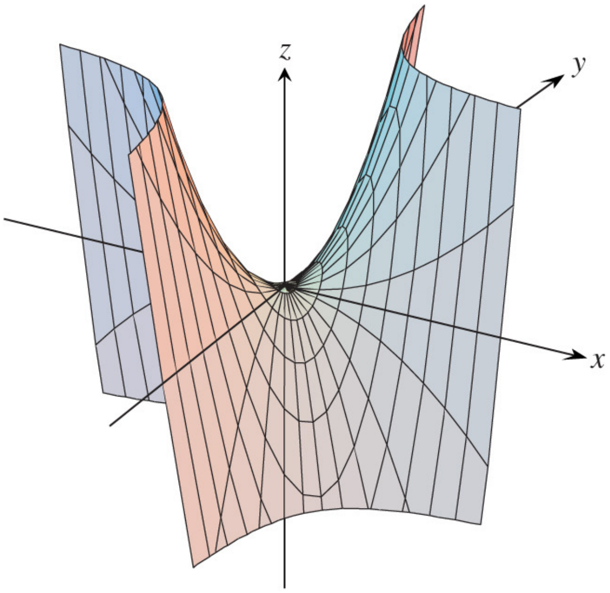
$$f_{xx} = 0 \quad , \quad f_{yy} = 0 \quad , \quad f_{xy} = 1$$

הדיסקרימיננטה של f ב- $(0,0)$ הינה

$$f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = -1 < 0$$

דיסקרימיננטה שלילית כך שהמשטח **אינו** מתעקם באותו האופן בכל הכיוונים. ל- f יש אם כך נקודת אוכף ב- $(0,0)$.

אנו מסיקים כי לפונקציה $f_{(x,y)} = xy$ אין ערכי קיצון מקומיים.



$z = xy$

מקסימום ומינימום מוחלטים באזורים סגורים ומתוחמים.

את החיפוש אחר ערכי קיצון **מוחלטים** של פונקציה רציפה $f_{(x,y)}$ באזור סגור ומתוחם **R**, אנו מחלקים לשלושה שלבים:

1) חישוב ערך הפונקציה בנקודות הקריטיות שלה – הנקודות **הפנימיות** שבהן מתאפסות נגזרותיה החלקיות הראשונות.
2) חישוב ערכי הפונקציה בנקודות **הגבול** של R אשר בהן היא מקבלת ערכי קיצון מקומיים (יודגם מיד).
3) בחירתם של הגבוה ביותר והנמוך ביותר מבין כל הערכים שחושבו לעיל. אלה הם ערכי המקסימום והמינימום **המוחלטים** של f ב- R.

דוגמה מהספר (עמ' 1031) – מציאת ערכי קיצון מוחלטים.

מצא את ערכי הקיצון המוחלטים של

$$f_{(x,y)} = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

באזור המשולש ברביע I אשר תחום ע"י הישרים

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad y = 9 - x$$

פיתרון: מאחר ש- f גזירה, ערכים אלה יכולים להתקבל רק בנקודות שבתוך המשולש אשר בהן $f_x = 0$ ו- $f_y = 0$, ובנקודות שעל הגבול.

א) נקודות פנימיות. עבורן יש לנו

$$f_x = 2 - 2x = 0 \quad , \quad f_y = 2 - 2y = 0$$

פתרון שתי המשוואות הינו $(x, y) = (1, 1)$

וערכה של f בנקודה זו הוא $f_{(1,1)} = 4$

ב) נקודות גבול. ננתח כל צלע של המשולש בתורה:

על המקטע OA , $y = 0$, ולכן יכולה f להיחשב פונקציה של x בלבד, המוגדרת על האינטרוול הסגור $0 \le x \le 9$.

$$f_{(x,y)} = f_{(x,0)} = 2 + 2x - x^2$$

נקודות הקיצון שלה יכולות להיות נקודות הקצה של המקטע - $x = 0$ שם $f_{(0,0)} = 2$, ו- $x = 9$ שם $f_{(9,0)} = -61$,

או נקודות פנימיות של המקטע היכן ש- $f'_{(x,0)} = 2 - 2x = 0$.

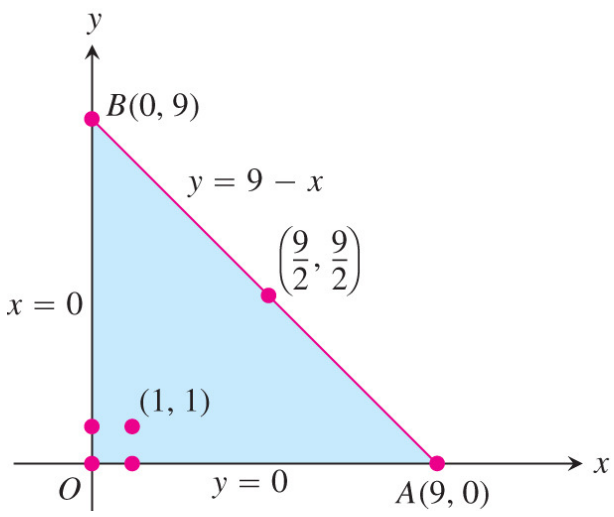
זה קורה כאשר $x = 1$, וערך הפונקציה שם הינו $f_{(1,0)} = 3$.

על המקטע OB , $x = 0$ ו- $f_{(x,y)} = f_{(0,y)} = 2 + 2y - y^2$

מהסימטריה של הפונקציה לגבי x ו- y , ומהניתוח הקודם, המועמדות לקיצון במקטע זה הינן

$$f_{(0,0)} = 2 \quad , \quad f_{(0,9)} = -61 \quad , \quad f_{(0,1)} = 3$$

המשך התרגיל במסגרת שמשמאל ←



נקודות הקצה של המקטע AB נותחו כבר קודם, כך שנותר רק לבדוק נקודות פנימיות של מקטע זה.

עם $y = 9 - x$ יש לנו

$$f_{(x,y)} = 2 + 2x + 2(9 - x) - x^2 - (9 - x)^2 \quad =>$$
$$f_{(x,y)} = -2x^2 + 18x - 61$$

איפוס הנגזרת הראשונה מניב

$$f'_{(x,\ 9-x)} = -4x + 18 = 0 \quad => \quad x = 4.5$$
$$y = 9 - x = 9 - 4.5 = 4.5$$
$$f_{(4.5,\ 4.5)} = -20.5$$

לסיכום, מבין כל הנקודות שבהן ישנה היתכנות לקבלת ערך קיצון מוחלט של f, המנצחות הן:

מקסימום מוחלט : $f_{(1,1)} = 4$

מינימום מוחלט : $f_{(9,0)} = f_{(0,9)} = -61$

לפיתרון בעיות של ערך קיצון תחת אילוצים אלגבריים על המשתנים, נדרש בדרך כלל שימוש בשיטת כופלי לגרנז'.
על כל פנים, לפעמים ניתן לפתור בעיות כאלה באופן ישיר, כפי שמוראה בדוגמה הבאה.

דוגמה מהספר (עמ' 1032) – פתרון בעיית נפח עם אילוץ .

מבין כל התיבות אשר סכום אורכן והיקף החתך (Girth) שלהן הוא 108 אינץ', מצא את מידותיה של זו בעלת הנפח הגדול ביותר.

פיתרון: נניח ל- x , y , ו- z לייצג את אורכה, רוחבה וגובהה של התיבה, בהתאמה. אם כך, היקף החתך הינו $2y+2z$.

אנו רוצים למקסם את נפח התיבה $V = xyz$ תחת האילוץ

אורך + היקף חתך = 108 אינץ' <= $x + 2y + 2z = 108$

$$x + 2y + 2z = 108 \quad => \quad x = 108 - 2y - 2z$$

אם כך, אנו יכולים לבטא את נפח התיבה כפונקציה של שני משתנים.

$$V_{(y,z)} = (108 - 2y - 2z)yz = 108yz - 2y^2z - 2yz^2$$

השוואת הנגזרות החלקיות הראשונות לאפס,

$$V_{y(y,z)} = 108z - 4zy - 2z^2 = z(108 - 4y - 2z) = 0$$

$$V_{z(y,z)} = 108y - 4zy - 2y^2 = y(108 - 4z - 2y) = 0$$

מניבה את הנקודות הקריטיות $(18,18)$, $(54,0)$, $(0,54)$, $(0,0)$.
שלוש מהן נותנות נפח אפס, כך שנותרה רק $(y,z) = (18,18)$.
נשתמש במבחן הנגזרת השנייה כדי לוודא שהיא אכן נקודת מקסימום.

$$V_{yy} = -4z \quad , \quad V_{zz} = -4y \quad , \quad V_{yz} = 108 - 4y - 4z$$

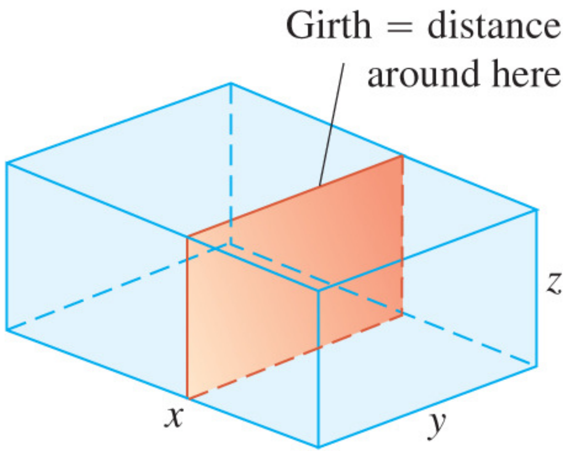
$$(y,z) = (18,18) \quad =>$$

$$V_{yy} = -72 \quad , \quad V_{zz} = -72 \quad , \quad V_{yz} = -36$$

הדיסקרימיננטה של V ב- $(y,z) = (18,18)$ היא אם כך

$$V_{yy}V_{zz} - {V_{yz}}^2 = (-72)^2 - (-36)^2 > 0$$

ומאחר ש- $V_{yy} = -72 < 0$, אנו מסיקים כי $(y,z) = (18,18)$
היא נקודת מקסימום, כצפוי, ואם כך מידות התיבה שנפחה מרבי הן
36 X 18 X 18 אינץ'. אגב, נפחה של תיבה זו הוא $11,664\ in.^3$.



סיכום של מבחני ערך קיצון

ערכי הקיצון של $f_{(x,y)}$ יכולים להופיע רק ב-

i. נקודות שעל גבול תחום ההגדרה של f .
ii. נקודות קריטיות (נקודות שבתוך תחום ההגדרה של f אשר בהן $f_x = f_y = 0$, או נקודות שבהן f_x או f_y אינן קיימות).

אם הנגזרות החלקיות של f מסדר ראשון ושני רציפות על פני דסקה שמרכזה (a,b) ו- $f_{x(a,b)} = f_{y(a,b)} = 0$, אז טבעה של $f_{(a,b)}$ יכול להיבחן ע"י **מבחן הנגזרת השנייה**:

i. $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 > 0$ ב- (a,b) <= קיצון.
ii. $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 < 0$ ב- (a,b) <= אוכף.
iii. $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = 0$ ב- (a,b) <= ?

למרות חוזקה של תיאורמה 10, כדאי לזכור את מגבלותיה. היא אינה תקפה בנקודות גבול של תחום ההגדרה, שם יכולה הפונקציה לקבל ערך קיצון **מבלי** שנגזרותיה תתאפסנה.

כמו כן, היא אינה תקפה לנקודות שבהן מי מהנגזרות הראשונות אינה קיימת.