מצא ואפיין את נקודות הקיצון של $f(x,y)=e^{x-y}(x^2-2y^2)$

תשובה:

הנקודה הגבוהה:

(___ , ___)

___ (ניתן להכניס את המילה מינימום/מקסימום/אוכף)

הנקודה הנמוכה:

(___ , ___)

___ (ניתן להכניס את המילה מינימום/מקסימום/אוכף)

נניח ש- $f_{(x,y)}$ ונגזרותיה החלקיות הראשונות והשניות רציפות על פני דסקה פתוחה שמרכזה (a,b), וש- $f_{x(a,b)}=f_{y(a,b)}=0$. או אז,

1) ל- f יש מקסימום מקומי ב- (a,b) אם $f_{xx}<0$ ו- $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2>0$ ב- (a,b) .

2) ל- f יש מינימום מקומי ב- (a,b) אם $f_{xx}>0$ ו- $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2>0$ ב- (a,b) .

3) ל- f יש נקודת אוכף ב- (a,b) אם $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2<0$ ב- (a,b) .

4) המבחן אינו חד משמעי ב- (a,b) אם $f_{xx}f_{yy}-{f_{xy}}^2=0$ ב- (a,b) .

$$f_{(x,y)}=e^{x-y}(x^2-2y^2)$$

$$\begin{cases} f_x = e^{x-y}(x^2-2y^2)+2xe^{x-y} = e^{x-y}(x^2-2y^2+2x) \\ f_y = -e^{x-y}(x^2-2y^2)-4ye^{x-y} = -e^{x-y}(x^2-2y^2+4y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x=0 \quad => \quad x^2-2y^2+2x=0 \\ f_y=0 \quad => \quad x^2-2y^2+4y=0 \end{cases} \quad => \quad 2x-4y=0 \quad => \quad x=2y$$

$$\begin{cases} x=2y \\ x^2-2y^2+4y=0 \end{cases} \quad => \quad (2y)^2-2y^2+4y=0 \quad => \quad 2y^2+4y=0 \quad => \quad y(y+2)=0$$

$$y_1=0 \quad => \quad x_1=0 \quad => \quad (0 \;,\; 0 \;,\; 0) \quad suspected$$

$$y_2=-2 \quad => \quad x_2=-4 \quad => \quad (-4 \;,\; -2 \;,\; 8e^{-2}) \quad suspected$$

$$f_x=e^{x-y}(x^2-2y^2+2x) \quad => \quad \begin{cases} f_{xx} = e^{x-y}(x^2-2y^2+2x)+e^{x-y}(2x+2) = e^{x-y}(x^2+4x-2y^2+2) \\ f_{xy} = -e^{x-y}(x^2-2y^2+2x)+e^{x-y}(-4y) = -e^{x-y}(x^2+2x-2y^2+4y) \end{cases}$$

$$f_y=-e^{x-y}(x^2-2y^2+4y) \quad => \quad f_{yy}=e^{x-y}(x^2-2y^2+4y)-e^{x-y}(-4y+4) = e^{x-y}(x^2-2y^2+8y-4)$$

$$f_{xx} = e^{x-y}(x^2 + 4x - 2y^2 + 2)$$

$$f_{xy} = -e^{x-y}(x^2 + 2x - 2y^2 + 4y)$$

$$f_{yy} = e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 8y - 4)$$

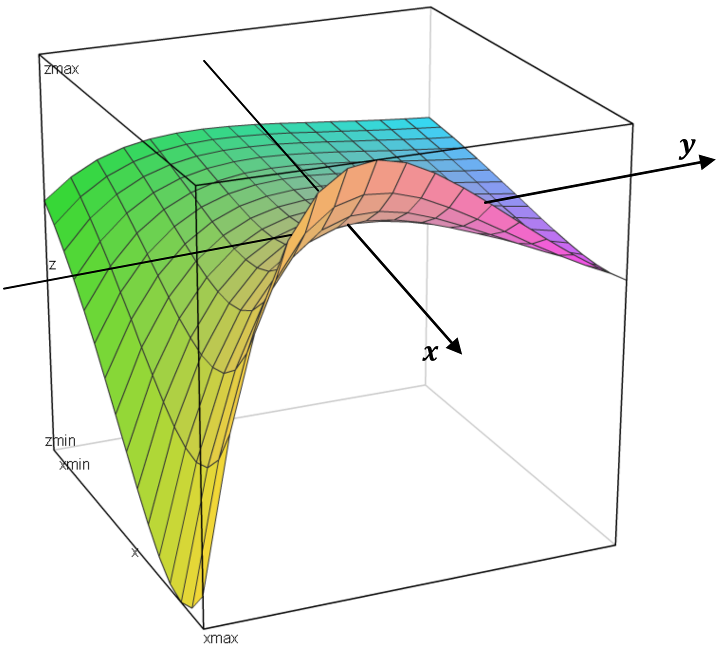
$(0 \;,\; 0 \;,\; 0)$ ***suspected***

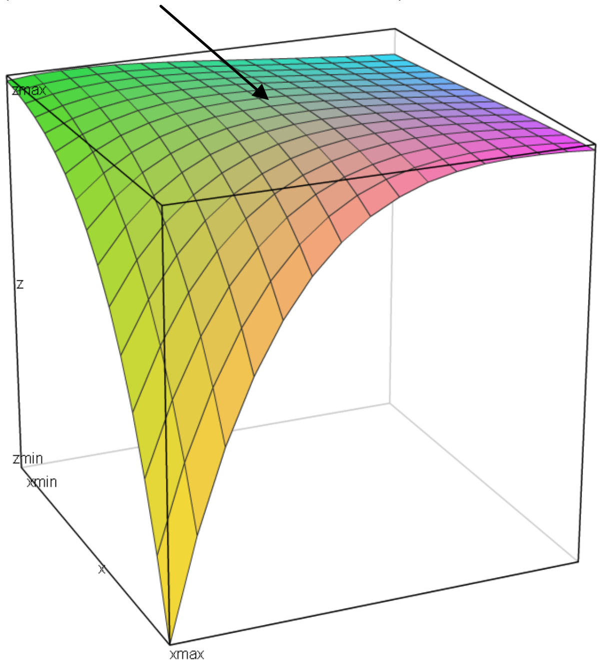
$$f_{xx}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 2 \quad , \quad f_{xy}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0 \quad , \quad f_{yy}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = -4$$

$\Delta = f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = -8 < 0 \quad =>$

$=> \quad (0 \;,\; 0 \;,\; 0)$ ***saddle***

$(-4 \;,\; -2 \;,\; 8e^{-2})$ ***maximum***





$$f_{xx} = e^{x-y}(x^2 + 4x - 2y^2 + 2)$$

$$f_{xy} = -e^{x-y}(x^2 + 2x - 2y^2 + 4y)$$

$$f_{yy} = e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 8y - 4)$$

$(-4 \;,\; -2 \;,\; 8e^{-2})$ ***suspected***

$$f_{xx}\Big|_{\substack{x=-4\\y=-2}} = -6e^{-2} \quad , \quad f_{xy}\Big|_{\substack{x=-4\\y=-2}} = 8e^{-2} \quad , \quad f_{yy}\Big|_{\substack{x=-4\\y=-2}} = -12e^{-2}$$

$\Delta = f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = 8e^{-4} > 0 \quad , \quad f_{xx} < 0 \quad => \quad (-4 \;,\; -2 \;,\; 8e^{-2})$ ***maximum***