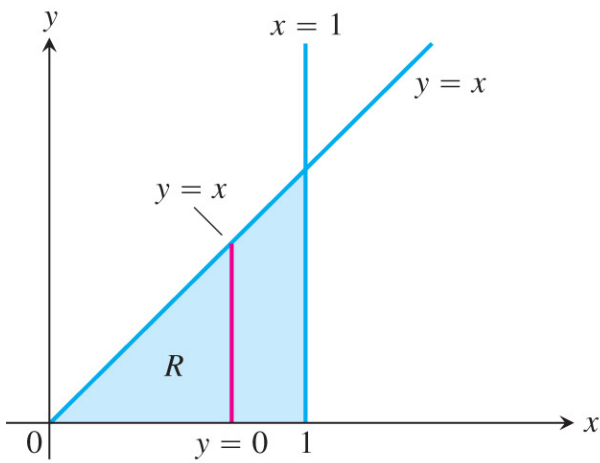


תרגיל:

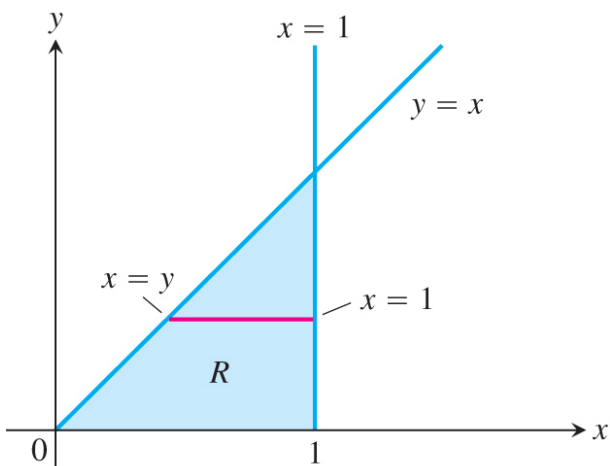
חשב את $\iint_R xy dA$ כאשר R הוא משולש במישור xy אשר תחום ע"י ציר x והישרים $y = x$ ו- $x = 1$.
חשב בשני האופנים.

פיתרון: דרך א'



$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} f(x,y) dy dx =$$
$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} xy dy dx =$$
$$\int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{xy^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=x} dx =$$
$$\int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{x^3}{2} \right) dx = \frac{x^4}{8} \Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

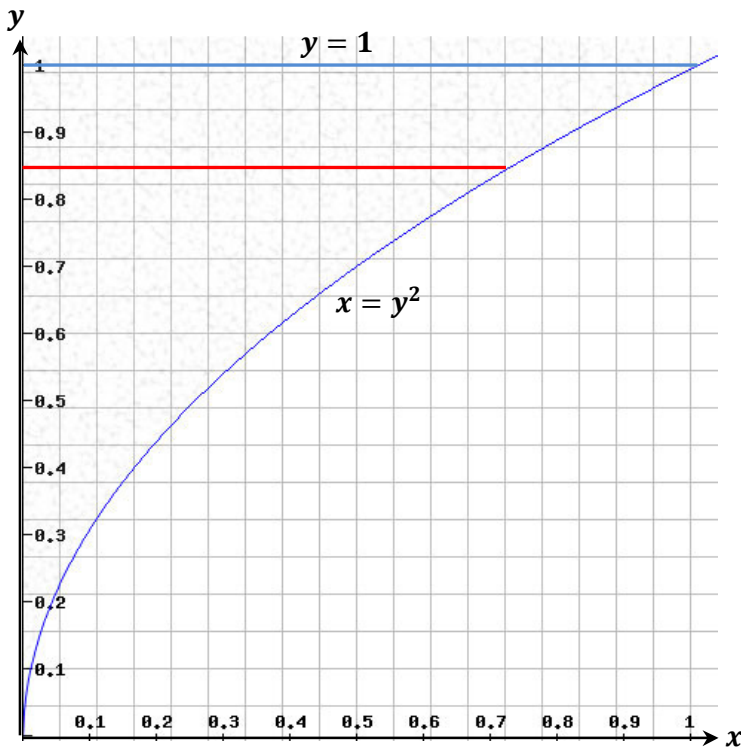
פיתרון: דרך ב'



$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=1} f(x,y) dx dy =$$
$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=1} xy dx dy =$$
$$\int_{y=0}^{y=1} \left(\frac{x^2 y}{2} \right) \Big|_{x=y}^{x=1} dy =$$
$$\int_{y=0}^{y=1} \left(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{2} \right) dy =$$
$$\left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{8} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} =$$
$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8}$$

תרגיל: חשב את $I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy$ רמז: הפוך סדר אינטגרציה, ז"א לך על אלמנטים שוכבים.

פיתרון:



$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=y^2} e^{y^3} dx dy =$$

$$\int_{y=0}^{y=1} e^{y^3} x \Big|_{x=0}^{x=y^2} dy =$$

$$\int_{y=0}^{y=1} e^{y^3} y^2 dy =$$

$$\frac{1}{3} \int_{y=0}^{y=1} e^{y^3} 3y^2 dy =$$

$$\frac{1}{3} \int_{u=0}^{u=1} e^u du = \frac{1}{3} e^u \Big|_{u=0}^{u=1} =$$

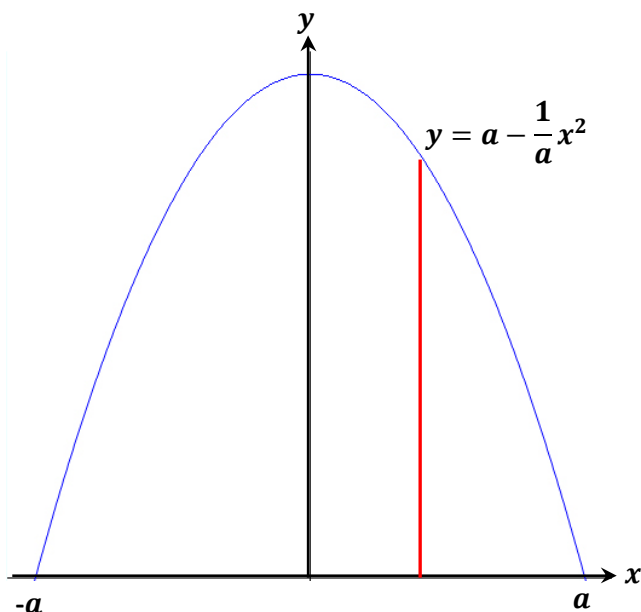
$$= \frac{1}{3} (e - 1)$$

תרגיל:

חשב את נפח הגוף התחום בין המישורים $z = a - x + y$, $z = 0$, $y = 0$ והגליל הפרבולי $y = a - \frac{1}{a}x^2$ ($0 < a$).

פיתרון:

ראשית כדאי לשים לב לכך ש- $\iint_R (a - x + y) dA = \iint_R (a + y) dA - \iint_R x dA$. $\iint_R x dA = 0$ בגלל שהנפח שגורע $z = x$ משמאל לציר y שווה לנפח שהוא מוסיף מימין לציר y .



$$\iint_R (a + y) dA = 2 \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=a-\frac{1}{a}x^2} (a + y) dy dx =$$

$$2 \int_{x=0}^{x=a} \left(ay + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=a-\frac{x^2}{a}} dx =$$

$$2 \int_{x=0}^{x=a} \left(a^2 - x^2 + \frac{a^2}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2a^2} \right) dx =$$

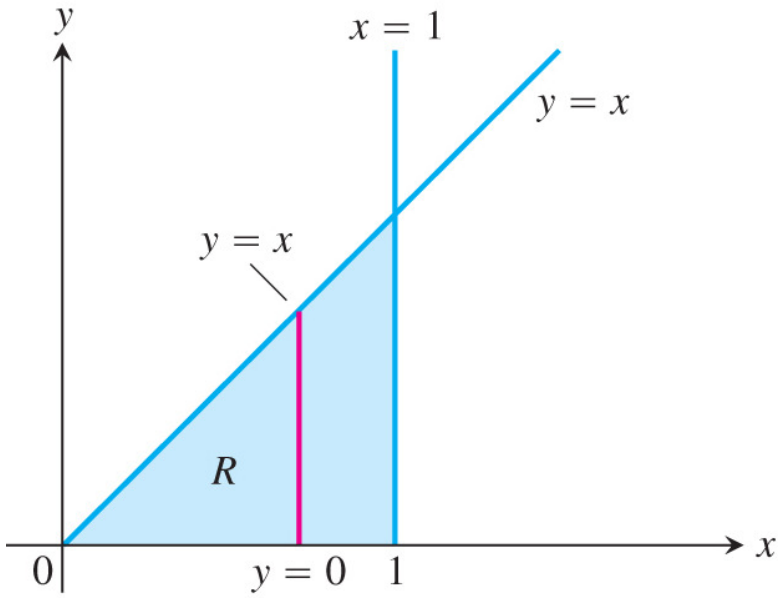
$$2 \int_{x=0}^{x=a} \left(\frac{x^4}{2a^2} - 2x^2 + \frac{3a^2}{2} \right) dx =$$

$$2 \left(\frac{x^5}{10a^2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3a^2}{2}x \right) \Big|_0^a = 2 \left(\frac{a^3}{10} - \frac{2a^3}{3} + \frac{3a^3}{2} \right) =$$

$$2 \left(\frac{28a^3}{30} \right) = \frac{28}{15} a^3$$

תרגיל: חשב את $\int_0^1 dx \int_0^x (xy + y^2) dy$

פיתרון:



$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} (xy + y^2) dy dx =$$

$$\int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=x} dx =$$

$$\int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} \right) dx =$$

$$\int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{5x^3}{6} \right) dx =$$

$$\left(\frac{5x^4}{24} \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{24}$$