<u>אינטגרל כפול ושימושיו.</u>

דוגמה מהספר (עמ' 1071) - חישוב אינטגרל כפול.

חשב את $\iint_R f_{(x,y)}dA$ עבור $f_{(x,y)} = 1 - 6x^2y$ כאשר $-1 \le y \le 1$, $0 \le x \le 2$:R .

פיתרון:

$$\iint_R f_{(x,y)}dA = \int_{-1}^{1}\int_0^2 (1-6x^2y)dxdy = \int_{-1}^{1}(x-2x^3y)\Big|_0^2 dy = \int_{-1}^{1}(2-16y)\,dy = (2y-8y^2)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= (2-8)-(-2-8) = 4$$

הפיכת סדר האינטגרציה מניבה את אותה התשובה:

$$\iint_R f_{(x,y)}dA = \int_0^2\int_{-1}^{1}(1-6x^2y)dydx = \int_0^2 (y-3x^2y^2)\Big|_{-1}^{1}dx = \int_0^2\left(1-3x^2-(-1-3x^2)\right)dx =$$

$$= \int_0^2 2\,dx = 2x\Big|_0^2 = 4$$

דוגמה מהספר (עמ' 1074) - חישוב נפח.

חשב את נפחה של מנסרה אשר בסיסה הוא משולש במישור xy אשר תחום ע"י ציר x והישרים $y = x$ ו- $x = 1$, ופאתה העליונה נמצאת במישור $z = f_{(x,y)} = 3 - x - y$. החישוב בעמוד הבא.

איור (a)
מנסרה שבסיסה משולש במישור xy.
נפחה הוא האינטגרל הכפול על R .
האינטגרציה יכולה להיעשות קודם לפי y
ואז לפי x או להיפך (ראה דוגמה קודמת).

איור (b)
גבולות האינטגרציה של

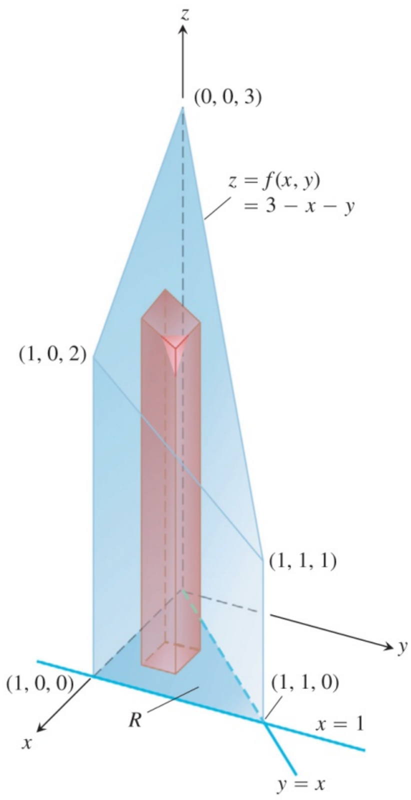
$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} f_{(x,y)}dydx$$

אם קודם אינטגרציה לפי y ואז לפי x ,
ז"א בניית אלמנט נפח dV מאונך לציר x
ואז סכימת האלמנטים לאורך ציר x .

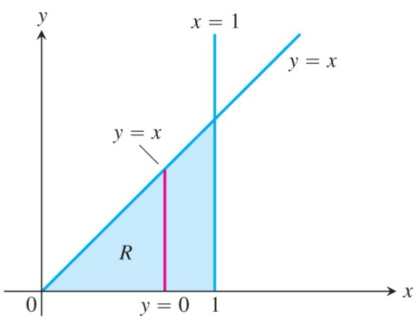
איור (c)
גבולות האינטגרציה של

$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=1} f_{(x,y)}dxdy$$

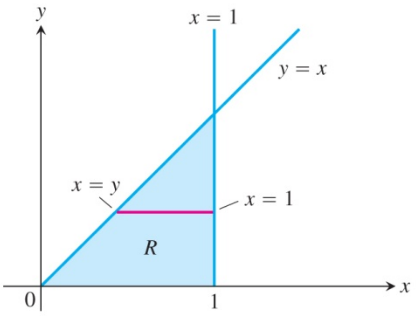
אם קודם אינטגרציה לפי x ואז לפי y ,
ז"א בניית אלמנט נפח dV מאונך לציר y
ואז סכימת האלמנטים לאורך ציר y .



(a)



(b)



(c)

$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} f_{(x,y)}\,dydx \;=$$

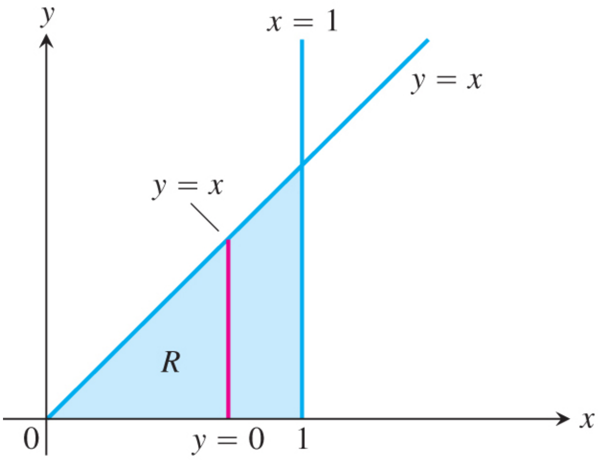
$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} (3-x-y)\,dydx \;=$$

$$\int_{x=0}^{x=1}\left(3y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=x} dx \;=$$

$$\int_{x=0}^{x=1}\left(3x-x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx \;=$$

$$\int_{x=0}^{x=1}\left(3x-\frac{3x^2}{2}\right)dx \;=$$

$$\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} \;=\; 1$$



האינטגרציה הראשונה לפי dy יצרה אלמנט נפח dV מאונך לציר x .
בסיס האלמנט הוא הקו הורוד, שאורכו y ועוביו dx .
גובה האלמנט הוא הפונקציה $f_{(x,y)}$ (כך שהוא משתנה כשנעים על הקו הורוד).
האינטגרציה השנייה לפי dx סכמה אינסוף אלמנטים של נפח כנ"ל, החל בשמאלי ביותר אשר עומד ב- $x=0$ וכלה בימני ביותר אשר עומד ב- $x=1$.

וכעת בסדר ההפוך

$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=1} f_{(x,y)}\,dxdy \;=$$

$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=1} (3-x-y)\,dxdy =$$

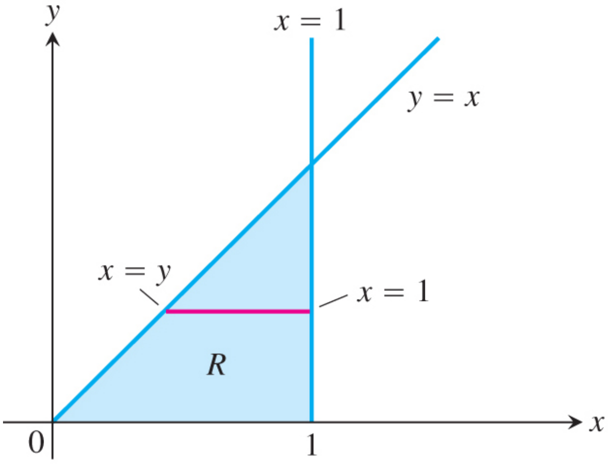
$$\int_{y=0}^{y=1}\left(3x-\frac{x^2}{2}-xy\right)\Big|_{x=y}^{x=1} dy \;=$$

$$\int_{y=0}^{y=1}\left(3-\frac{1}{2}-y-\left(3y-\frac{y^2}{2}-y^2\right)\right)dy =$$

$$\int_{y=0}^{y=1}\left(3-\frac{1}{2}-4y+\frac{y^2}{2}+y^2\right)dy =$$

$$\int_{y=0}^{y=1}\left(\frac{3y^2}{2}-4y+\frac{5}{2}\right)dy \;=$$

$$\left(\frac{y^3}{2}-2y^2+\frac{5y}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} \;=\; 1$$



האינטגרציה הראשונה לפי dx יצרה אלמנט נפח dV מאונך לציר y .
בסיס האלמנט הוא הקו הורוד, שאורכו $1-x$ ועוביו dy .
גובה האלמנט הוא הפונקציה $f_{(x,y)}$ (משתנה לאורך הקו הורוד).

האינטגרציה השנייה לפי dy סכמה אינסוף אלמנטים של נפח כנ"ל,
החל בנמוך ביותר אשר שוכב ב- $y=0$
וכלה בגבוה ביותר אשר שוכב ב- $y=1$.

למרות שמותר לחשב אינטגרל כפול באיזה סדר שרוצים, בחירת הסדר יכולה להשפיע על מורכבות החישובים הנדרשים.

דוגמה מהספר (עמ' 1074) - באינטגרל כפול הסדר יכול להשפיע על מורכבות החישובים.

חשב את $\iint_R \frac{\sin x}{x} dA$ כאשר R הוא משולש במישור xy אשר תחום ע"י ציר x , הישר $y = x$ והישר $x = 1$.

פיתרון:

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} f_{(x,y)} dy dx =$$

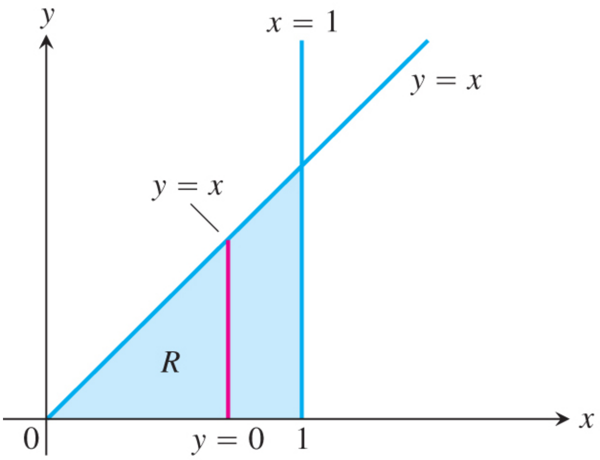
$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} \frac{\sin x}{x} dy dx =$$

$$\int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot y\right) \Big|_{y=0}^{y=x} dx =$$

$$\int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot x\right) dx =$$

$$\int_{x=0}^{x=1} (\sin x)\, dx =$$

$$(-\cos x) \Big|_{x=0}^{x=1} = -\cos 1 + 1 \approx 0.46$$



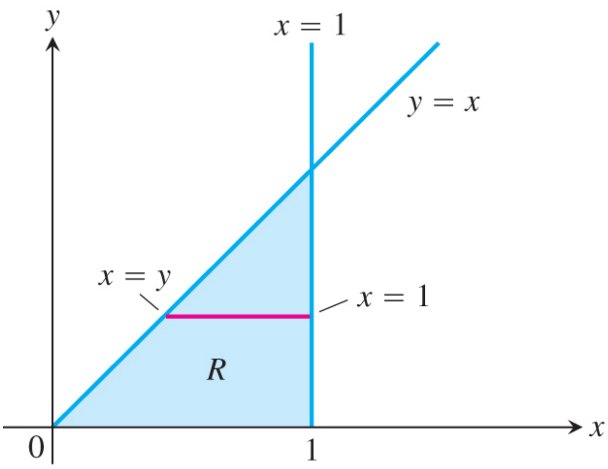
האינטגרציה הראשונה לפי dy יצרה אלמנט נפח dV מאונך לציר x .
בסיס האלמנט הוא הקו הורוד, שאורכו y ועוביו dx .
גובה האלמנט הוא הפונקציה $f_{(x,y)}$ (כאן הוא **קבוע** כשנעים על הקו הורוד).
האינטגרציה השנייה לפי dx סכמה אינסוף אלמנטים של נפח כנ"ל, החל בשמאלי ביותר אשר עומד ב- $x = 0$ וכלה בימני ביותר אשר עומד ב- $x = 1$.

וכעת בסדר ההפוך

$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=1} f_{(x,y)} dx dy =$$

$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=1} \frac{\sin x}{x} dx dy =$$

כאן אנו בבעיה מפני שאין לנו פיתרון
ל- $\int \frac{\sin x}{x} \mathrm{dx}$ ב"ארגז הכלים" שלנו.



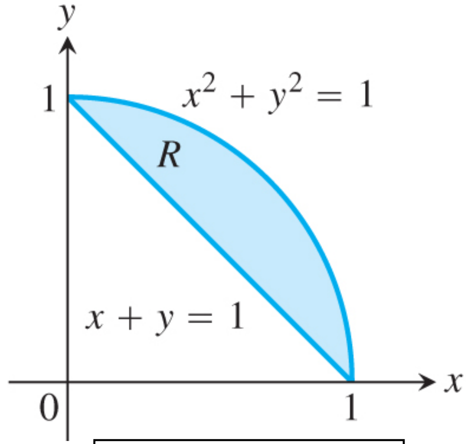
האינטגרציה הראשונה לפי dx , אם הייתה מצליחה, הייתה יוצרת אלמנט נפח dV מאונך לציר y .

אח"כ הייתה האינטגרציה השנייה לפי dy סוכמת אינסוף אלמנטים של נפח כנ"ל,
החל בנמוך ביותר אשר "שוכב" ב- $y = 0$
וכלה בגבוה ביותר אשר "שוכב" ב- $y = 1$.

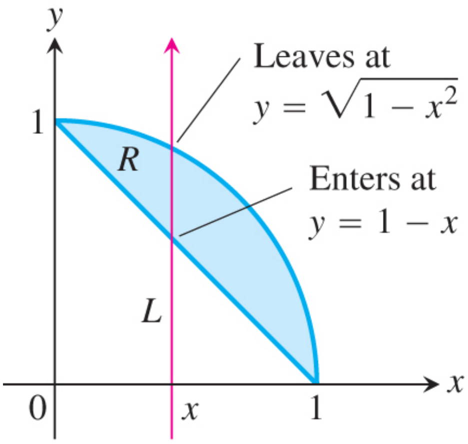
אנו רואים שישנם מקרים בהם סדר האינטגרציה הינו הרה גורל.

מציאת גבולות אינטגרציה

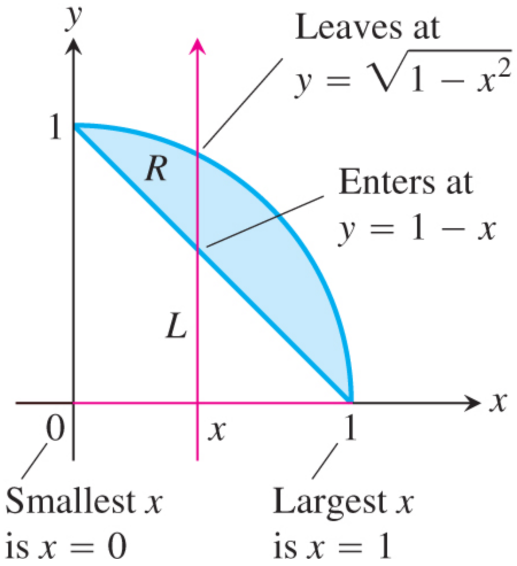
כשעלינו לחשב את $\iint_R f_{(x,y)}dA$ תוך אינטגרציה קודם לפי y ואז לפי x, נמצא את גבולות האינטגרציה כך:



ראשית נשרטט את איזור האינטגרציה R ונסמן את העקומות התוחמות אותו.

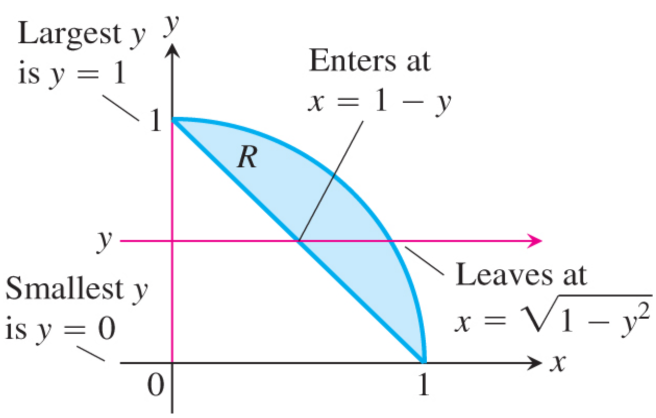


אח"כ נמצא את גבולות y של האינטגרציה: נדמיין ישר אנכי L אשר חותך דרך R בכיוון y החיובי, ונסמן את ערכי y היכן ש- L נכנס ויוצא. אלה הם גבולות האינטגרציה לפי y, והם בד"כ פונקציות של x (במקום קבועים).



לבסוף נמצא את גבולות x של האינטגרציה:
נבחר גבולות x אשר כוללים את כל הישרים האנכיים דרך R.
האינטגרל המוצג כאן הינו

$$\iint_R f_{(x,y)}dA = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f_{(x,y)}dydx$$



כדי לחשב את אותו האינטגרל בסדר הפוך,
נשתמש בישרים אופקיים בשלבים השני והשלישי.
האינטגרל אז יהיה

$$\iint_R f_{(x,y)}dA = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=1-y}^{x=\sqrt{1-y^2}} f_{(x,y)}dxdy$$

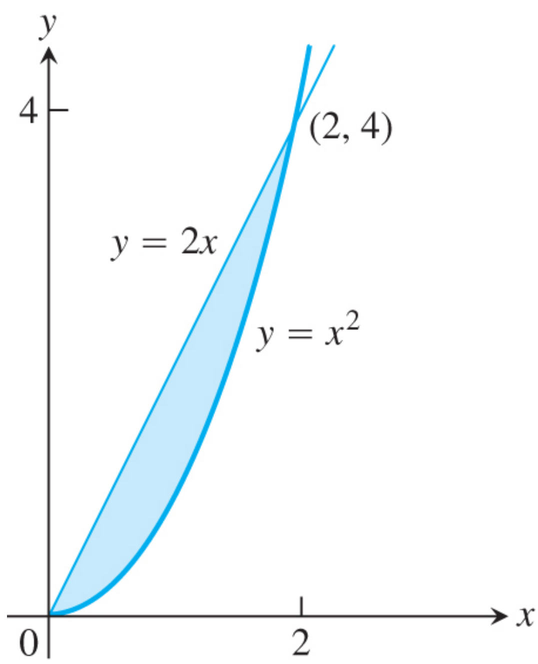
דוגמה מהספר (עמ' 1077) – הפיכת סדר האינטגרציה.

שרטט את איזור האינטגרציה עבור האינטגרל

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2)\,dy\,dx$$

וכתוב את האינטגרל השקול לו כשסדר האינטגרציה הפוך.

פיתרון:



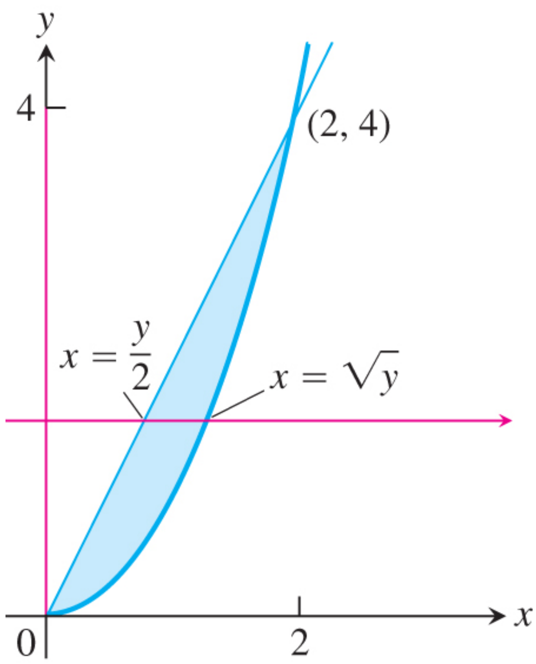
איזור האינטגרציה נתון באי-השוויונים

$x^2 \le y \le 2x$ ו- $0 \le x \le 2$

והינו לכן האזור התחום בין העקומות

$y = x^2$ ו- $y = 2x$

כמוראה באיור שלעיל.



כדי למצוא את גבולות האינטגרציה בסדר ההפוך, נדמיין ישרים אופקיים החולפים משמאל לימין דרך איזור האינטגרציה.
הם נכנסים דרך $x = \frac{y}{2}$ ויוצאים דרך $x = \sqrt{y}$.
כדי לכלול את כל הקווים האלה "נריץ" את y מ- 0 עד 4 .
האינטגרל הינו

$$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (4x+2)\,dx\,dy$$

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2)\,dy\,dx = \int_0^2 (4xy+2y)\Big|_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 \left(8x^2+4x-4x^3-2x^2\right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(-4x^3+6x^2+4x\right) dx = \left(-x^4+2x^3+2x^2\right)\Big|_0^2 = -16+16+8-(0) = 8$$

ועכשיו בהפוכה

$$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (4x+2)\,dx\,dy = \int_0^4 \left(2x^2+2x\right)\Big|_{x=\frac{y}{2}}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(2y+2\sqrt{y}-\frac{y^2}{2}-y\right) dy$$ = תמשיכו לבד