דיפרנציאלים

עבור פונקציה של משתנה יחיד $y = f_{(x)}$, הגדרנו

את השינוי ב- f כאשר x משתנה מ- a ל- $a + \Delta x$ כ- $\Delta f = f_{(a+\Delta x)} - f_{(a)}$

ואת הדיפרנציאל של f כ- $df = f'_{(a)} \cdot \Delta x$

נדון כעת בפונקציה של שני משתנים.

נניח כי $f_{(x,y)}$ הינה פונקציה גזירה ב- $(x_0 \,,\, y_0)$, ושנגזרותיה החלקיות קיימות בנקודה זו.

אם נזוז לנקודה סמוכה $(x_0 + \Delta x \,,\, y_0 + \Delta y)$, השינוי ב- f יהיה $\Delta f = f_{(x_0+\Delta x \,,\, y_0+\Delta y)} - f_{(x_0,y_0)}$.

מהגדרת הליניאריזאציה $L_{(x,y)} = f_{(x_0,y_0)} + f_{x(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) + f_{y(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0)$ (ראה פרק קודם)

תוך הצבת $\Delta x = x - x_0$ ו- $\Delta y = y - y_0$, אנו רואים כי השינוי ב- L הינו

$$\Delta L = L_{(x_0+\Delta x \,,\, y_0+\Delta y)} - L_{(x_0,y_0)} = f_{x(x_0,y_0)} \cdot \Delta x + f_{y(x_0,y_0)} \cdot \Delta y$$

הדיפרנציאלים dx ו- dy הינם משתנים בלתי תלויים, כך שניתן לקבוע להם כל ערך שהוא.

לרוב אנו קובעים $dx = \Delta x = x - x_0$ ו- $dy = \Delta y = y - y_0$, ואז מתקבלת ההגדרה הבאה לדיפרנציאל השלם של f .

<u>הגדרה</u>: **דיפרנציאל שלם**

אם זזים מ- $(x_0 \,,\, y_0)$ לנקודה קרובה $(x_0 + dx \,,\, y_0 + dy)$, אז השינוי $df = f_{x(x_0,y_0)} \cdot dx + f_{y(x_0,y_0)} \cdot dy$

המתקבל **בליניאריזאציה** של f נקרא הדיפרנציאל השלם של f .

דוגמה מהספר (עמ' 1021) – אומדן לשינוי נפח.

מיכל גלילי מתוכנן להיות בעל רדיוס של 1 אינץ' וגובה של 5 אינץ', אך בפועל ישנה סטייה

בת $dr = +0.03\ inch$ ברדיוס, ו- $dh = -0.1\ inch$ בגובה. מהו האומדן לשינוי בנפח המיכל ?

פיתרון: כדי לאמוד את השינוי ב- $V = \pi r^2 h$, נרשום $\Delta V \approx dV = V_{r(r_0,h_0)} \cdot dr + v_{h(r_0,h_0)} \cdot dh$.

$$V = \pi r^2 h \quad => \quad V_r = 2\pi r h \quad , \quad v_h = \pi r^2$$

$$dV = 2\pi r_0 h_0 \cdot dr + \pi {r_0}^2 \cdot dh = 2\pi(1)(5)(0.03) + \pi(1)^2(-0.1) = 0.3\pi - 0.1\pi = 0.2\pi\ inch^3$$

במקום לאמוד את השינוי המוחלט בערכה של פונקציה $f_{(x,y)}$, אנו יכולים לאמוד את השינוי היחסי או השינוי באחוזים ע"י

$$\frac{df}{f_{(x_0,y_0)}} \quad \text{או} \quad \frac{df}{f_{(x_0,y_0)}} \cdot 100$$

בדוגמה דנן, השינוי היחסי נאמד להיות $\frac{1}{25} = \frac{0.2\pi}{\pi(1)^2(5)} = \frac{0.2\pi}{\pi {r_0}^2 h_0} = \frac{dV}{V_{(r_0,h_0)}}$, או באחוזים - 4%.

דוגמה מהספר (עמ' 1022) – רגישות לשינוי.

מיכל גלילי מתוכנן להיות בעל רדיוס r = 5 feet וגובה h = 25 feet .

מהי רגישותו של נפח המיכל לשינויים קטנים בגובה וברדיוס ?

פיתרון: כמו בדוגמה הקודמת, מ- $V = \pi r^2 h$ אנו מקבלים את הקירוב לשינוי בנפח כדלקמן :

$$dV = V_{r(r_0,h_0)} \cdot dr + V_{h(r_0,h_0)} \cdot dh = 2\pi r_0 h_0 \cdot dr + \pi {r_0}^2 \cdot dh = 2\pi(5)(25) \cdot dr + \pi(5)^2 \cdot dh$$

$$dV = 250\pi \cdot dr + 25\pi \cdot dh$$

אם כך, שינויו של רדיוס המיכל ביחידה אחת $(dr = \pm 1 \text{ unit})$ יביא לשינוי בן 250π יחידות בנפחו.

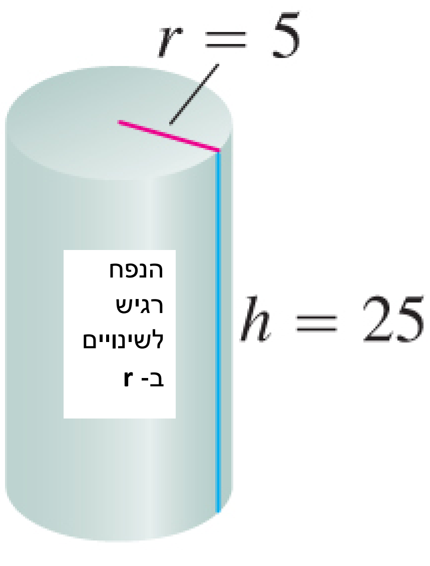
לעומת זאת, שינויו של גובה המיכל ביחידה אחת $(dh = \pm 1 \text{ unit})$ יביא לשינוי בן 25π יחידות בנפחו.

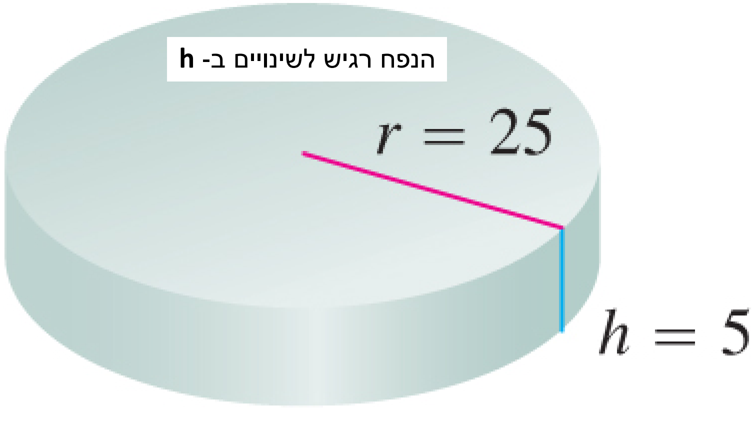
בנסיבות הנתונות, רגיש נפח המיכל פי 10 לשינויים קטנים ברדיוס מישהו רגיש לשינויים קטנים בגובה.

אם נחליף בין מידותיהם של הרדיוס והגובה, כך ש- **r = 25 feet** ו- **h = 5 feet** , נקבל

$$dV = 2\pi r_0 h_0 \cdot dr + \pi {r_0}^2 \cdot dh = 2\pi(25)(5) \cdot dr + \pi(25)^2 \cdot dh = 250\pi \cdot dr + 625\pi \cdot dh$$

כעת רגיש יותר נפח המיכל לשינויים קטנים בגובה מישהו רגיש לשינויים קטנים ברדיוס.





ככלל, פונקציות הן רגישות ביותר לשינויים קטנים באותם משתנים אשר מחוללים את הנגזרות החלקיות הגדולות יותר.

דוגמה מהספר (עמ' 1022) – אומדן הטעות באחוזים.

הנפח $V = \pi r^2 h$ של גליל מחושב לפי ערכים נמדדים של r ו- h.

נניח ש- r נמדד בשיעור טעות שאינו עולה על 2% , וש- h נמדד בשיעור טעות שאינו עולה על 0.5% .

מהו האומדן לטעות האפשרית בחישוב נפח המיכל ?

פיתרון: נתון בעצם כי

$$\left|\frac{dr}{r}\cdot 100\right| \le 2 \quad , \quad \left|\frac{dh}{h}\cdot 100\right| \le 0.5$$

מאחר ש-

$$\frac{dV}{V} = \frac{2\pi rh\cdot dr + \pi r^2\cdot dh}{\pi r^2 h} = \frac{2dr}{r} + \frac{dh}{h}$$

מתקבל

$$\left|\frac{dV}{V}\right| = \left|\frac{2dr}{r} + \frac{dh}{h}\right| \le \left|\frac{2dr}{r}\right| + \left|\frac{dh}{h}\right| \le 2(0.02) + 0.005 = 0.045$$

אנו אומדים את הטעות שבחישוב הנפח להיות 4.5% לכל היותר.