גזירות (דיפרנציאביליות)

נקודת הפתיחה לגזירות איננה מנת ההפרש המפורסמת של פרמה, אלא הרעיון של **תוספת** (דיפרנציאל).
נזכור מדיונינו בפונקציות של משתנה יחיד כי אם $y = f_{(x)}$ גזירה ב- $x = x_0$, אז השינוי בערכה של f אשר נובע משינויו של x מ- x_0 ל- $x_0 + \Delta x$ נתון במשוואה מהצורה $\Delta y = f'_{(x_0)} \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$, שבה $\varepsilon \to 0$ כאשר $\Delta x \to 0$.
ההגדרה של גזירות עבור פונקציות של שני משתנים מושתתת על תכונה מקבילה, ו**תיאורמת התוספת** מגלה לנו מתי יש לצפות מתכונה זו להתקיים.

תיאורמה 3 : תיאורמת התוספת לפונקציות של שני משתנים

נניח שהנגזרות מסדר ראשון של $f_{(x,y)}$ מוגדרות באזור פתוח R שבתוכו נקודה $(x_0 \,,\, y_0)$.
או אז, השינוי $\Delta z = f_{(x_0+\Delta x \,,\, y_0+\Delta y)} - f_{(x_0,y_0)}$ בערכה של f אשר נובע מתזוזה מ- $(x_0 \,,\, y_0)$ לנקודה אחרת $(x_0 + \Delta x \,,\, y_0 + \Delta y)$ ב- **R** , מתאים למשוואה מהצורה

$$\Delta z = f_{x(x_0,y_0)} \cdot \Delta x + f_{y(x_0,y_0)} \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y$$

שבה $\varepsilon_1, \varepsilon_1 \to 0$ כאשר $\Delta x, \Delta y \to 0$

(אותו העיקרון תופס גם עבור פונקציות של יותר משני משתנים בלתי תלויים).

הגדרה: פונקציה גזירה (דיפרנציאבילית)

פונקציה $z = f_{(x,y)}$ הינה גזירה ב- $(x_0 \,,\, y_0)$ אם $f_{x(x_0,y_0)}$ ו- $f_{y(x_0,y_0)}$ קיימות,
ו- Δz מקיימת משוואה מהצורה

$$\Delta z = f_{x(x_0,y_0)} \cdot \Delta x + f_{y(x_0,y_0)} \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y$$

שבה $\varepsilon_1, \varepsilon_1 \to 0$ כאשר $\Delta x, \Delta y \to 0$

אנו אומרים ש- f **גזירה**, אם היא גזירה בכל נקודה שבתחום ההגדרה שלה.

כפועל יוצא של תיאורמה 3 ניתן לומר שפונקציה היא גזירה אם נגזרותיה החלקיות הראשונות **רציפות**.

פועל יוצא של תיאורמה 3 : **רציפות של נגזרות חלקיות משמעה גזירות של הפונקציה.**

אם הנגזרות החלקיות f_x ו- f_y של פונקציה $f_{(x,y)}$ הינן רציפות **באזור פתוח R** , אז f גזירה בכל נקודה שב- **R** .

אם $z = f_{(x,y)}$ הינה גזירה, אז ההגדרה לגזירות מבטיחה לנו ש- $\Delta z = f_{(x_0+\Delta x \,,\, y_0+\Delta y)} - f_{(x_0,y_0)}$ שואפת לאפס כאשר Δx ו- Δy שואפות לאפס. תכונה זו מעידה על כך שפונקציה של שני משתנים הינה רציפה בכל נקודה שבה היא גזירה.

תיאורמה 4 : **גזירות של פונקציה משמעה רציפות של הפונקציה**

אם פונקציה $f_{(x,y)}$ גזירה ב- $(x_0 \,,\, y_0)$, אז היא גם רציפה ב- $(x_0 \,,\, y_0)$.

מתיאורמות 3 ו- 4 אנו מסיקים שפונקציה היא בהכרח רציפה בנקודה $(x_0 \,,\, y_0)$ אם f_x ו- f_y רציפות **באזור פתוח** אשר מכיל את $(x_0 \,,\, y_0)$. עם זאת נזכור כי פונקציה של שני משתנים **יכולה להיות בלתי רציפה** בנקודה שבה נגזרותיה החלקיות הראשונות **קיימות** (ראה הדוגמה שבתחילת הפרק הקודם).
קיומן של הנגזרות החלקיות בנקודה אינו מספיק כשלעצמו, עליהן להיות גם רציפות בתוככי מעגל שמרכזו הוא הנקודה הנדונה.