

מצא נקודות קיצון של  $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$  ואפיין אותן.

יש לבחור תשובה אחת:

- a.  $(0,1)$  אוקף,  $(1,0)$  מקסימה מקומית,  $(-1,0)$  מינימה מקומית.
- b.  $(1,0)$  מקסימה מקומית,  $(-1,0)$  מינימה מקומית,  $(0,1)(0,-1)$  אוקף.
- c.  $(0,1)$  אוקף,  $(1,0)$  מקסימה מקומית.
- d.  $(1,0)$  מינימה מקומית,  $(-1,0)$  מינימה מקומית,  $(0,1)(0,-1)$  אוקף.

ניחש-  $f(x,y)$  נגזרותיה החלקיות הראשונות והשניות רציפות על פני דסקה פתוחה שמרכזה  $(a,b)$ , ו-  $f_{x(a,b)} = f_{y(a,b)} = 0$  או אז,

- (1) ל-  $f$  יש מקסימום מקומי ב-  $(a,b)$  אם  $f_{xx} < 0$  ו-  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$  ב-  $(a,b)$ .
- (2) ל-  $f$  יש מינימום מקומי ב-  $(a,b)$  אם  $f_{xx} > 0$  ו-  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$  ב-  $(a,b)$ .
- (3) ל-  $f$  יש נקודת אוקף ב-  $(a,b)$  אם  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$  ב-  $(a,b)$ .
- (4) המבחן אינו חד משמעי ב-  $(a,b)$  אם  $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$  ב-  $(a,b)$ .

$$f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$$

$$\begin{cases} f_x = 3 - 3x^2 - 3y^2 \\ f_y = -6xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x = 0 & \Rightarrow & 1 - x^2 - y^2 = 0 & \Rightarrow & x^2 + y^2 = 1 \\ f_y = 0 & \Rightarrow & xy = 0 & \Rightarrow & x = 0 \text{ or } y = 0 \end{cases}$$

Suspected points:

$$(0, 1, 0) \quad (0, -1, 0) \quad (1, 0, 2) \quad (-1, 0, -2)$$

$$f_x = 3 - 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = -6x \\ f_{xy} = -6y \end{cases}$$

$$f_y = -6xy \Rightarrow f_{yy} = -6x$$

$$f_{xx} = -6x \quad , \quad f_{xy} = -6y \quad , \quad f_{yy} = -6x$$

$(0, 1, 0)$  *suspected*

$$f_{xx} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = 0 \quad , \quad f_{xy} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = -6 \quad , \quad f_{yy} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = 0$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -36 < 0 \quad \Rightarrow \quad (0, 1, 0) \text{ saddle}$$

$(0, -1, 0)$  *suspected*

$$f_{xx} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=-1}} = 0 \quad , \quad f_{xy} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=-1}} = 6 \quad , \quad f_{yy} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=-1}} = 0$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -36 < 0 \quad \Rightarrow \quad (0, -1, 0) \text{ saddle}$$

$(1, 0, 2)$  *suspected*

$$f_{xx} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = -6 \quad , \quad f_{xy} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = 0 \quad , \quad f_{yy} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = -6$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36 > 0 \quad , \quad f_{xx} < 0 \quad \Rightarrow \quad (1, 0, 2) \text{ maximum}$$

$(-1, 0, -2)$  *suspected*

$$f_{xx} \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=0}} = 6 \quad , \quad f_{xy} \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=0}} = 0 \quad , \quad f_{yy} \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=0}} = 6$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36 > 0 \quad , \quad f_{xx} > 0 \quad \Rightarrow \quad (-1, 0, -2) \text{ minimum}$$

