נגזרות חלקיות

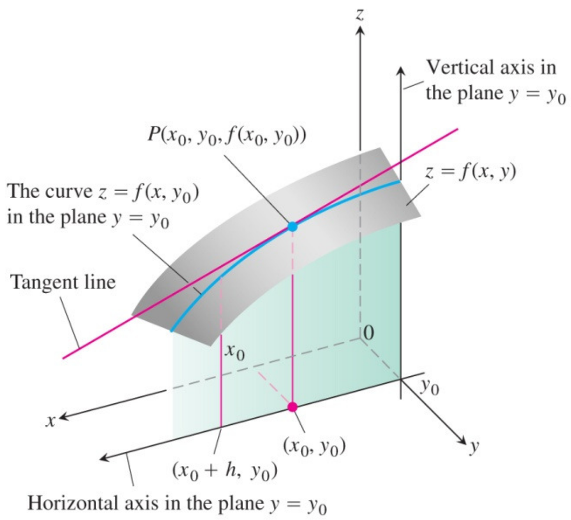
קלקולוס של מספר משתנים הוא בבסיסו קלקולוס של משתנה יחיד המופעל על כל משתנה בתורו.
כשמקבעים את כל משתניה של פונקציה פרט לאחד שעל פיו גוזרים, מתקבלת נגזרת חלקית.
בפרק זה נראה כיצד מוגדרת הנגזרת החלקית וכיצד יש לפרשה גיאומטרית.

נגזרות חלקיות של פונקציה של שני משתנים

אנו מתעניינים בנקודה $P(x_0\,,\,y_0\,,\,f_{(x_0\,,y_0)})$ אשר על המשטח $z=f_{(x,y)}$.
נתבונן במישור $y=y_0$ אשר מכיל את נקודה P ומקביל למישור xz.
מישור זה מתווה על המשטח $z=f_{(x,y)}$ את העקום $z=f_{(x,y_0)}$.
לאורך עקום זה (כחול באיור) מוחזק ערכו של y קבוע ($y=y_0$), כך ש- $z=f_{(x,y)}$ משתנה רק כתוצאה משינוי ב- x.

אנו מגדירים את הנגזרת החלקית של f לפי x בנקודה $(x_0\,,\,y_0)$, כנגזרת הרגילה של $f_{(x,y_0)}$ לפי x בנקודה $x=x_0$.

כדי להבחין בין נגזרת חלקית לנגזרת רגילה משתמשים בסימן ∂ במקום d.

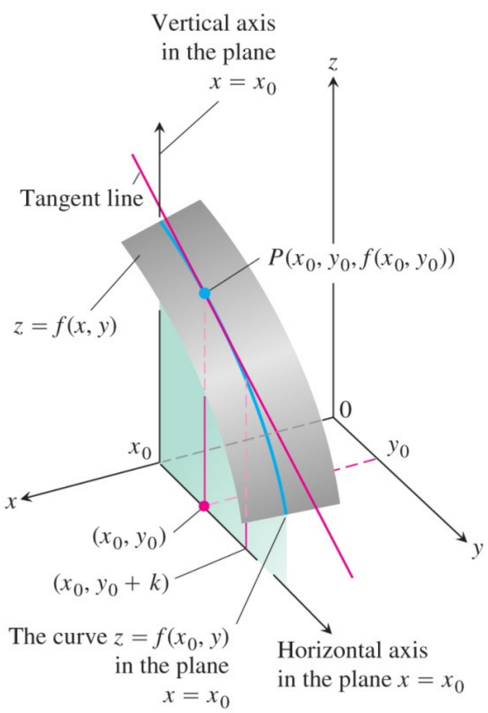


<u>הגדרה</u>: נגזרת חלקית לפי x

הנגזרת החלקית של $f_{(x,y)}$ לפי x בנקודה $(x_0\,,\,y_0)$ היא:
$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0\,,y_0)}=lim_{h\to 0}\frac{f_{(x_0+h\,,y_0)}-f_{(x_0\,,y_0)}}{h}$$

בתנאי שהגבול קיים.

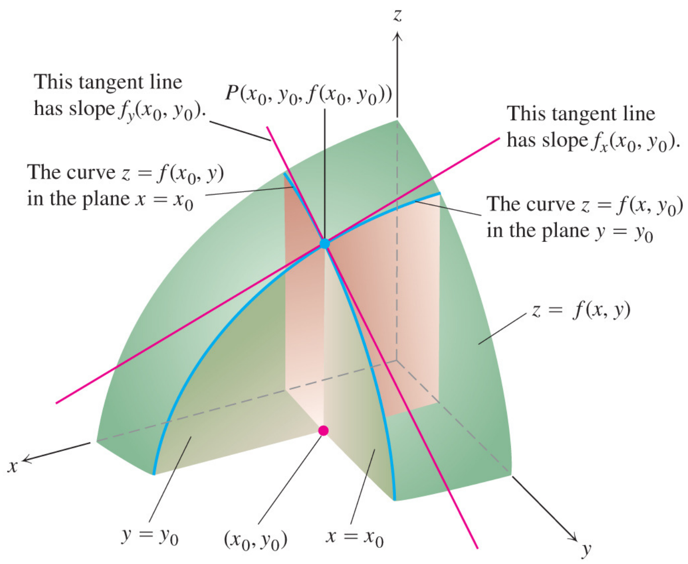
$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0\,,y_0)}$ הוא שיפוע העקום $z=f_{(x,y_0)}$ בנקודה $P(x_0\,,\,y_0\,,\,f_{(x_0\,,y_0)})$
באיור לעיל, הישר הורוד משיק לעקום זה בנקודה P , ושיפועו הוא ערך הנגזרת החלקית הנ"ל.
$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0\,,y_0)}$ היא הקצב שבו משתנה f לפי x כאשר ערכו של y מוחזק קבוע על y_0 .
זהו קצב השינוי של f בכיוון $\hat{x}$ בנקודה P.



הנגזרת החלקית של f לפי y בנקודה $(x_0\,,\,y_0)$ מוגדרת אופן דומה, אלא שהפעם מוחזק ערכו של x קבוע, על x_0.

אנו מתעניינים בנקודה $P(x_0\,,\,y_0\,,\,f_{(x_0\,,y_0)})$ אשר על המשטח $z=f_{(x,y)}$.
נתבונן במישור $x=x_0$ אשר מכיל את נקודה P ומקביל למישור yz.
מישור זה מתווה על המשטח $z=f_{(x,y)}$ את העקום $z=f_{(x_0\,,y)}$.
לאורך עקום זה (כחול באיור) מוחזק ערכו של x קבוע ($x=x_0$), כך ש- $z=f_{(x,y)}$ משתנה רק כתוצאה משינוי ב- y.

$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0\,,y_0)}$ הוא שיפוע העקום $z=f_{(x_0\,,y)}$ בנקודה $P(x_0\,,\,y_0\,,\,f_{(x_0\,,y_0)})$.
הישר הורוד משיק לעקום זה בנקודה P , ושיפועו הוא ערך הנגזרת החלקית הנ"ל.
$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0\,,y_0)}$ היא הקצב שבו משתנה f לפי y כאשר ערכו של x קבוע - x_0.
זהו קצב השינוי של f בכיוון $\hat{y}$ בנקודה P.



כעת יש לנו שני ישרים אשר משיקים למשטח $z = f_{(x,y)}$ בנקודה $P(x_0\ ,\ y_0\ ,\ f_{(x_0\ ,\ y_0)})$.
האם המישור המוגדר ע"י שני ישרים אלה משיק בנקודה P למשטח?
על פי האיור שמשמאל נראה שכן, ואכן כך הוא הדבר, אך כדי להבין מדוע עלינו ללמוד עוד על נגזרות חלקיות.

ההגדרות של $\frac{\partial f}{\partial x}$ ושל $\frac{\partial f}{\partial y}$ מספקות לנו שתי דרכים שונות לגזירתה של f בנקודה כלשהי, האחת לפי x תוך התייחסות ל- y כאל קבוע, והשנייה לפי y תוך התייחסות ל- x כאל קבוע. ערכי הנגזרות החלקיות בנקודה יהיו שונים זה מזה ברוב המקרים.

דוגמה (עמ' 987 בספר) - מציאת נגזרות חלקיות בנקודה.

חשב את $\frac{\partial f}{\partial x}$ ואת $\frac{\partial f}{\partial y}$ בנקודה $(4,-5)$ *אם* $f_{(x,y)} = x^2 + 3xy + y - 1$.

פיתרון: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 3xy + y - 1\right) = 2x + 3y$ <= הערך של $\frac{\partial f}{\partial x}$ בנקודה $(4,-5)$ הוא $2 \cdot 4 + 3 \cdot (-5) = -7$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 3xy + y - 1\right) = 3x + 1$ <= הערך של $\frac{\partial f}{\partial y}$ בנקודה $(4,-5)$ הוא $3 \cdot 4 + 1 = 13$

דוגמה (עמ' 987 בספר) - מציאת נגזרות חלקיות כנוסחה.

מצא את $\frac{\partial f}{\partial y}$ *אם* $f_{(x,y)} = y \sin xy$.

פיתרון: נגזור כמכפלה <= $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y \sin xy) = \sin xy + xy \cos xy$

דוגמה (עמ' 987 בספר) – נגזרות חלקיות הן בדרך כלל פונקציות שונות זו מזו.

מצא את f_x ואת f_y *אם* $f_{(x,y)} = \frac{2y}{y + \cos x}$

פיתרון: נגזור כמנה, כשב- f_x מוחזק y כקבוע, וב- f_y מוחזק x כקבוע:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{y + \cos x}\right) = 2y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y + \cos x}\right) = 2y\frac{-(-\sin x)}{(y + \cos x)^2} = \frac{2y\sin x}{(y + \cos x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{y + \cos x}\right) = 2\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{y + \cos x}\right) = 2\ \frac{y + \cos x - y}{(y + \cos x)^2} = \frac{2\cos x}{(y + \cos x)^2}$$

דוגמה (עמ' 988) - גזירה חלקית של פונקציה סתומה.

מצא את $\frac{\partial z}{\partial x}$ אם המשוואה $yz - \ln z = x + y$ מגדירה את z כפונקציה של שני משתנים בלתי תלויים x ו- y .

פיתרון: אנו גוזרים את שני אגפי המשוואה לפי x תוך החזקתו של y קבוע והתייחסות אל z כאל פונקציה גזירה של x :

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}\ln z = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \quad => \quad y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 0 \quad => \quad \left(y - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad => \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{yz - 1}$$

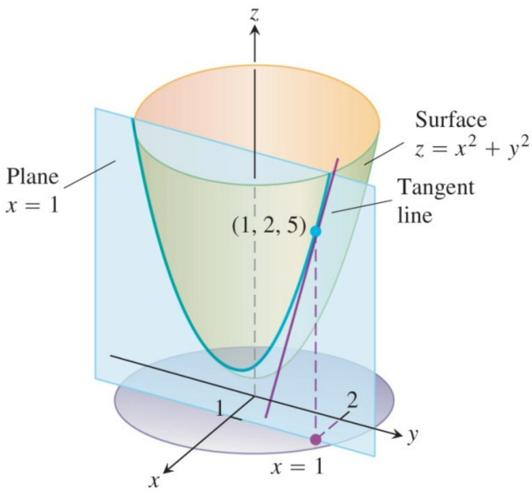
דוגמה (עמ' 988) – מציאת שיפועו של משטח בכיוון y .

חיתוך המישור $x = 1$ עם הפרבולואידה $z = x^2 + y^2$ יוצר פרבולה.

מצא את שיפוע המשיק לפרבולה בנקודה $(1, 2, 5)$.

פיתרון: השיפוע הוא ערך הנגזרת החלקית $\frac{\partial z}{\partial y}$ ב- $(1, 2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = 2y \quad => \quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)} = 4$$



דוגמה (עמ' 988) – נגדים במקביל.

ההתנגדות השקולה (R_T) של נגדים R_1 , R_2 , ו- R_3 המחוברים במקביל

מבוטאת בנוסחה $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

מצא את המידה בה מושפע R_T משינוי קטן בערכו של R_2,

כאשר $R_1 = 30\Omega$, $R_2 = 45\Omega$ ו- $R_3 = 90\Omega$.

פיתרון: נגזור את שני האגפים לפי R_2 תוך החזקת R_1 ו- R_3 **קבועים.**

$$\frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R_T}\right) = \frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

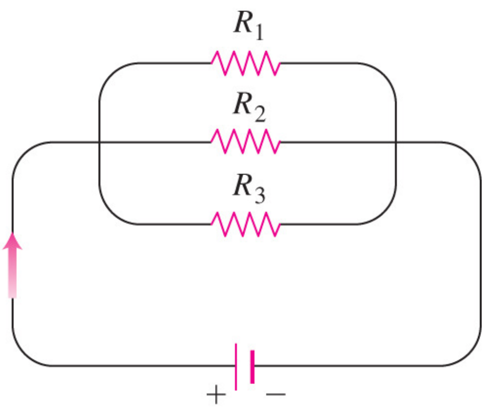
$$-\frac{1}{{R_T}^2}\frac{\partial R_T}{\partial R_2} = 0 - \frac{1}{{R_2}^2} + 0$$

$$\frac{\partial R_T}{\partial R_2} = \left(\frac{R_T}{R_2}\right)^2$$

ע"פ הנוסחה הנתונה, $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{90} = \frac{1}{15} \quad => \quad R_T = 15\Omega$

$$\frac{\partial R_T}{\partial R_2} = \left(\frac{R_T}{R_2}\right)^2 = \left(\frac{15}{45}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

גודל השינוי ב- R_T *הוא תשיעית מגודל השינוי ב-* R_2 (רגישות לא גבוהה).



הנגדים שבאיור מחוברים במקביל.
דרך כ"א מהם עובר חלק מזרם הסוללה,
ולכן כ"א מהם מפחית את ההתנגדות
הכוללת (השקולה) של המעגל.
התנגדות זו נתונה בנוסחה:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

כל נגד נוסף במקביל מפחית עוד יותר
את ההתנגדות השקולה של המעגל.
זאת ועוד, ההתנגדות השקולה של נגדים
במקביל נמוכה תמיד מזו של כ"א מהם.