נגזרות חלקיות ורציפות

אפשר שתהיינה לפונקציה $f_{(x,y)}$ נגזרות חלקיות בנקודה מבלי שהפונקציה תהיה רציפה שם.
זאת **בניגוד** לפונקציות של משתנה יחיד, שבהן קיומה של נגזרת בנקודה מעיד על רציפות הפונקציה באותה נקודה.
על כול פנים, אם הנגזרות החלקיות של $f_{(x,y)}$ קיימות ורציפות בתוככי מעגל שמרכזו (x_0, y_0), אז f רציפה ב - (x_0, y_0).

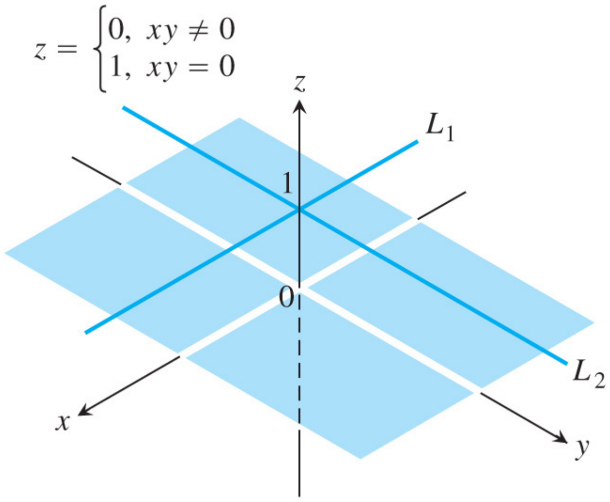
דוגמה מהספר (עמ' 990) – נגזרות חלקיות קיימות אבל f אינה רציפה.

נניח $f_{(x,y)} = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$

א. מצא את הגבול שאליו שואפת f כאשר (x,y) מתקרב ל- $(0,0)$ לאורך הישר $y = x$.

ב. הוכח כי f אינה רציפה בראשית.

ג. הראה שהנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x}$ ו- $\frac{\partial f}{\partial y}$ קיימות בראשית.



פיתרון:

א. מאחר ש- $f_{(x,y)}$ שווה אפס לאורך הישר $y = x$ (מלבד בראשית), מתקיים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{(x,y)}\Big|_{y=x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$$

ב. מאחר ש- $f_{(0,0)} = 1$, הגבול מסעיף א' מוכיח ש- f אינה רציפה ב- $(0,0)$.

ג. כדי למצוא את $\frac{\partial f}{\partial x}$ נחזיק את y קבוע על $y = 0$. במצב זה $f_{(x,y)} = 1$ לכל x , והגרף של f הוא הישר L_1 שבציור.
שיפועו של ישר זה הינו $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ בכל x שהוא **לרבות בראשית**, ז"א $\frac{\partial f}{\partial x}$ קיימת בראשית.
באופן דומה $\frac{\partial f}{\partial y}$ הינו שיפוע הישר L_2 בכל y שהוא **לרבות בראשית**, ז"א $\frac{\partial f}{\partial y}$ קיימת בראשית.

למרות הדוגמה שהובאה כאן, **גם בריבוי מימדים** נכון לומר שגזירות בנקודה מעידה על רציפות בה.
הדוגמה באה רק להראות שכשמדובר בריבוי מימדים, אין די בקיומן של נגזרות חלקיות כדי לספק הוכחה לגזירות.
גזירותן של פונקציות של שני משתנים תוגדר בסוף הפרק, והקשר שבין גזירות ורציפות יידון אז שוב.

נגזרות חלקיות מסדר שני

כשאנו גוזרים פונקציה $f_{(x,y)}$ פעמיים, אנו מקבלים את נגזרותיה מסדר שני.
נגזרות אלה מסומנות כך בד"כ: f_{xx} או $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, f_{yy} או $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, f_{yx} או $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, f_{xy} או $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
המשוואות המגדירות הינן: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

שימו לב לסדר הגזירה: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ משמעו גזור ראשית לפי y *ואז לפי* x .

דוגמה מהספר (עמ' 991) – מציאת נגזרות חלקיות מסדר שני.

אם $f_{(x,y)} = x\cos y + ye^x$, מצא את $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

פיתרון :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos y + ye^x) = -\sin y + e^x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos y + ye^x) = ye^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-x\sin y + e^x) = -\sin y + e^x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-x\sin y + e^x) = -x\cos y$$

<u>תיאורמת הנגזרות המעורבות</u>

שמתם לב בודאי שהנגזרות המעורבות מסדר שני $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ ו- $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ שוות זו לזו. אין זה צרוף מקרים.
הן בהכרח שוות זו לזו כל עוד f , f_x , f_y , f_{xy} ו- f_{yx} רציפות, כפי שאומרת התיאורמה הבאה של קלרו:

> תיאורמה 2 : תיאורמת הנגזרות המעורבות
>
> אם $f_{(x,y)}$ ונגזרותיה החלקיות f_x , f_y , f_{xy} ו- f_{yx} מוגדרות על פני איזור פתוח שבתוכו נקודה (a,b),
> ובנקודה (a,b) מתקיים ש- $f_{(x,y)}$ ונגזרותיה החלקיות רציפות, אז $f_{xy(a,b)} = f_{yx(a,b)}$.

העובדה שבנגזרת מעורבת סדר הגזירה אינו משנה יכולה לעבוד לטובתנו, כפי שניתן לראות בדוגמה הבאה:

דוגמה מהספר (עמ' 992) – בחירת סדר הגזירה.

מצא את $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ אם $w = xy + \frac{e^y}{y^2+1}$

פיתרון :

הסימון $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ אומר אומנם שיש לגזור קודם לפי y ואח"כ לפי x , אבל אם נהפוך את סדר הגזירה נגיע לתשובה ביתר קלות:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1$$

<u>נגזרות חלקיות מסדרים גבוהים יותר</u>

למרות שאנו עוסקים בעיקר בנגזרות חלקיות מסדר ראשון ושני, אין גבול למספר הפעמים שניתן לגזור פונקציה כל עוד הנגזרת הנדונה קיימת. בהתאם לכך אנו מקבלים נגזרות מסדר שלישי ורביעי המסומנות כך: $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} = f_{yyx}$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2} = f_{yyxx}$ וכו'.
כמו בנגזרות מסדר שני, סדר הגזירה אינו משנה כל עוד הנגזרות "שבדרך" רציפות.

דוגמה מהספר (עמ' 992) – חישוב נגזרת חלקית מסדר רביעי.

מצא את f_{yxyz} אם $f_{(x,y,z)} = 1 - 2xy^2z + x^2y$.

פיתרון :

אנו גוזרים לפי y , אח"כ לפי x , אח"כ שוב לפי y ולבסוף לפי z :

$$f_y = -4xyz + x^2 \quad => \quad f_{yx} = -4yz + 2x \quad => \quad f_{yxy} = -4z \quad => \quad f_{yxyz} = -4$$