גבולות ורציפות בריבוי ממדים

פרק זה עוסק בגבולות וברציפות של פונקציות של מספר משתנים. הגדרת הגבול של פונקציה של שניים או שלושה משתנים דומה לזו של פונקציה של משתנה יחיד, בהבדל חשוב אחד, כפי שיוסבר מיד.

גבולות

אם ערכי $f_{(x,y)}$ קרובים מאוד למספר ממשי קבוע L עבור כל הנקודות (x, y) אשר קרובות מספיק לנקודה (x_0, y_0), אנו אומרים ש- f שואפת לגבול **L** כאשר (x, y) שואפת ל- (x_0, y_0). הדבר דומה אומנם להגדרה הלא פורמאלית לגבול של פונקציה של משתנה יחיד, אך כאן יש לשים לב לכך שאם (x_0, y_0) נמצאת **בפנים** תחום ההגדרה של f , (x, y) יכולה לשאוף ל- (x_0, y_0) מכל כיוון ולא רק משני כיוונים. הכיוון שממנו שואפת (x, y) ל- (x_0, y_0) יכול להיות חשוב, כפי שנראה בהמשך.

> הגדרה: גבול של פונקציה של שני משתנים
>
> אנו אומרים שפונקציה $f_{(x,y)}$ שואפת לגבול **L** שעה שהנקודה (x, y) שואפת לנקודה (x_0, y_0) וכותבים:
>
> $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_{(x,y)} = \mathrm{L}$$
>
> זאת, אם לכל מספר חיובי ϵ קיים מספר חיובי מתאים δ כך שמתקיים :
>
> $\left|f_{(x,y)} - \mathrm{L}\right| < \epsilon$ כאשר $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (\mathrm{y} - y_0)^2} < \delta$
>
> לכל (x, y) שבתחום ההגדרה של f .

הגדרת הגבול אומרת שהמרחק בין $f_{(x,y)}$ ל- L קטן עד בלי די כאשר המרחק בין (x, y) ל- (x_0, y_0) קטן מספיק (אך לא 0). הגדרת הגבול תקפה לכל נקודה (x_0, y_0) שבתחום ההגדרה של f , תהא זו נקודת שפה (Boundary Point) או נקודה שבפנים תחום ההגדרה (Interior Point). יש רק להקפיד על כך שהנקודה (x, y) תישאר **תמיד** בתחום ההגדרה.

כללי הגבולות עבור פונקציות של שני משתנים הם ממש "העתק-הדבק" של אלה שהכרנו עבור פונקציות של משתנה יחיד :

> תיאורמה 1: אם $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_{(x,y)} = L$ ו- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g_{(x,y)} = M$, אזי מתקיימים הכללים הבאים:
>
> כלל הסכום/הפרש: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f_{(x,y)} \pm g_{(x,y)}] = L \pm M$
>
> כלל המכפלה: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f_{(x,y)} \cdot g_{(x,y)}] = L \cdot M$
>
> כלל ההכפלה בקבוע: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[k \cdot f_{(x,y)}] = k \cdot L$
>
> כלל המנה: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f_{(x,y)}/g_{(x,y)}] = L/M$

דוגמה מהספר (עמ' 977) - חישוב גבולות.

$$a)\ \ \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3} = -3 \qquad b)\ \ \lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2+y^2} = 5$$

$$c)\ \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 0$$

צמצום הגורם $x - y$ התאפשר כאן הודות לכך שגורם זה לא יכול היה להיות 0 מלכתחילה, ז"א **המסלול** $x = y$ אינו נמצא כלל בתחום ההגדרה של הפונקציה $\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

רציפות

כמו בפונקציות של משתנה יחיד, גם בפונקציות של מספר משתנים הרציפות מוגדרת בעזרת גבולות.

> הגדרה: פונקציה רציפה של שני משתנים
>
> פונקציה $\boldsymbol{f_{(x,y)}}$ רציפה בנקודה $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$ אם מתקיים:
>
> 1) הפונקציה מוגדרת בנקודה $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$.
>
> 2) $\lim_{(x,y)\to(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})}\boldsymbol{f}_{(x,y)} = \boldsymbol{f}_{(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})}$
>
> פונקציה היא רציפה אם היא רציפה בכל נקודה שבתחום ההגדרה שלה.

בדומה לגבול, הגדרת הרציפות תקפה לכל נקודה $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$ שבתחום ההגדרה של $\boldsymbol{f}$, תהא זו נקודת שפה (Boundary Point) או נקודה שבפנים תחום ההגדרה (Interior Point). יש רק להקפיד על כך שהנקודה $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ תישאר **תמיד** בתחום ההגדרה.
מצירוף אלגברי של פונקציות רציפות מתקבלת פונקציה שאף היא רציפה, בכל נקודה שבה הפונקציות המעורבות רציפות.
נובע מכך שסכומים, הפרשים, מכפלות, מנות וחזקות של פונקציות רציפות, רציפים אף הם בתחום הגדרתם.
יודגש במיוחד המקרה של פולינומים ופונקציות מנה של שני משתנים, שהינם רציפים בכל נקודה שבה הם מוגדרים.

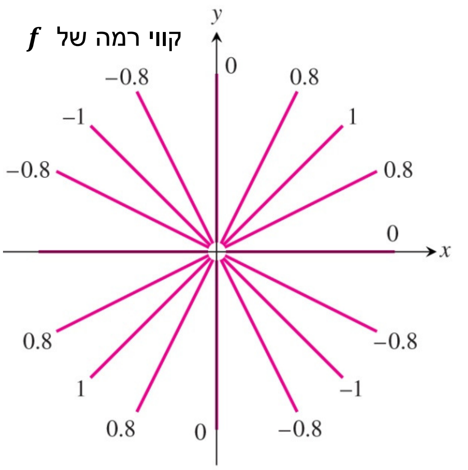
דוגמה מהספר (עמ' 979): פונקציה עם נקודה יחידה של אי רציפות.

הראה כי הפונקציה $\boldsymbol{f_{(x,y)}} = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & ,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}) \\ \boldsymbol{0} & ,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}) \end{cases}$ **רציפה בכל נקודה, למעט בראשית.**

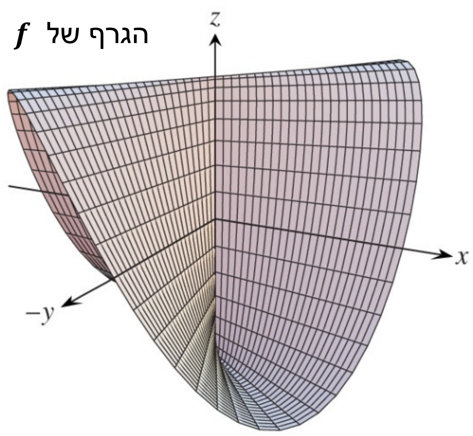
פיתרון: הפונקציה $\boldsymbol{f}$ רציפה בכל נקודה שבה $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$, כי ערכיה מתקבלים אז מפונקצית מנה של $\boldsymbol{x}$ ו- $\boldsymbol{y}$.
כאשר $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$ ערכה של $\boldsymbol{f}$ מוגדר אומנם ($\boldsymbol{0}$), אבל אין לה גבול כאשר $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$.
זאת משום שכאשר מתקרבים לראשית במסלולים שונים, $\boldsymbol{f}$ מקבלת ערכים שונים, כפי שמוראה להלן:

> באיור משמאל מוצגים מספר קווי רמה של $\boldsymbol{f}$ $\left(\frac{2xy}{x^2+y^2} = \boldsymbol{c}\right)$.
>
> בכולם יש "חור" כאשר $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$, משום שהם אינם מוגדרים אז.
> לאורך המסלולים $\boldsymbol{y = 0}$ ו- $\boldsymbol{x = 0}$ מתקבל $\boldsymbol{c = 0}$, לכן אם נתקרב לראשית מארבעת הכיוונים שמסלולים אלה מאפשרים ייווצר רושם מוטעה של רציפות. אבל, בכל מסלול אחר של התקרבות לראשית מתקבל $\boldsymbol{c \neq 0}$:
> במסלול $\boldsymbol{y = x}$ מתקבל $\boldsymbol{c = 1}$.
> במסלולים $\boldsymbol{y = 0.5x}$ ו- $\boldsymbol{y = 2x}$ מתקבל $\boldsymbol{c = 0.8}$.
> במסלול $\boldsymbol{y = -x}$ מתקבל $\boldsymbol{c = -1}$.
> במסלולים $\boldsymbol{y = -0.5x}$ ו- $\boldsymbol{y = -2x}$ מתקבל $\boldsymbol{c = -0.8}$.
> אם כך, **לא בכל מסלול** מתקיים $\lim_{(x,y)\to(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})}\boldsymbol{f}_{(x,y)} = \boldsymbol{f}_{(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})}$
> ולכן גבול זה אינו קיים, ז"א $\boldsymbol{f}$ אינה רציפה בראשית הצירים.
>
> הדוגמה בה עסקנו כאן מחדדת נקודה חשובה באשר לגבולות של פונקציות של שני משתנים (או יותר): **כדי שגבול יהיה קיים בנקודה, עליו להיות בלתי תלוי בנתיב ההתקרבות לנקודה.** לכן, בכל פעם שנמצא נתיבים אשר מניבים גבולות שונים בנקודה, נדע שלפונקציה אין גבול בנקודה זו.
>
> אגב, גם כשעסקנו בפונקציות של משתנה יחיד, להזכירכם, אמרנו שכדי שגבול יהיה קיים בנקודה עליו להיות **בלתי תלוי** בכיוון ההתקרבות לנקודה, אלא שאז היו לנו רק שני כיווני התקרבות אפשריים לנקודה, שמאל וימין, וכעת ישנם אין ספור כיוונים כאלה.

קווי רמה של $\boldsymbol{f}$



הגרף של $\boldsymbol{f}$



מבחן המסלולים לאי קיומו של גבול :

אם לפונקציה $f_{(x,y)}$ ישנם גבולות שונים כאשר (x,y) מתקרב ל- (x_0,y_0) במסלולים שונים, אזי

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_{(x,y)}$ **אינו קיים**

דוגמה מהספר (עמ' 980) לשימוש במבחן המסלולים.

הראה שלפונקציה $f_{(x,y)}=\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ אין גבול כאשר $(x,y)\to(0,0)$.

פיתרון: בהצבה ישירה מתקבל בח"מ: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{(x,y)}=\frac{0}{0}$, אז ננסה להתקרב אל $(x,y)=(0,0)$ במסלולים שונים אשר מסתיימים ב- $(0,0)$. עבור הפונקציה דנן, קווים מהצורה $y=kx^2$ $(x\neq 0)$ מהווים קווי רמה, ז"א קווים שלאורכם היא מקבלת ערך קבוע c. כדי לגלות את הקשר שבין אותו ערך קבוע לבין k , נציב kx^2 במקום y בפונקציה:

$$f_{(x,y)}=\frac{2x^2y}{x^4+y^2} \quad => \quad f_{(x,kx^2)}=\frac{2x^2kx^2}{x^4+(kx^2)^2}=\frac{2kx^4}{(1+k^2)x^4}=\frac{2k}{1+k^2}=c$$

ובכן, כל עוד נעים לאורך מסלול מהצורה $y=kx^2$ ערכה של f אינו משתנה ושווה ל- $\frac{2k}{1+k^2}$.
ערך קבוע זה מהווה (מן הסתם) את הגבול שאליו שואפת הפונקציה עת קרבים לקצה המסלול, ל- $(0,0)$.
אנו רואים כי הגבול שאליו שואפת הפונקציה בהתקרבה ל- $(0,0)$ תלוי ב- k , ז"א במסלול ההתקרבות, ולכן אינו קיים.

הגבול תלוי ב- k , ז"א במסלול, ולכן אינו קיים. $=>$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2 \text{ לאורך}}} f_{(x,y)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(f_{(x,y)}\Big|_{y=kx^2}\right)=\frac{2k}{1+k^2}$$

באיור העליון משמאל מוצגים מספר קווי רמה של f $\left(\frac{2x^2y}{x^4+y^2}=c\right)$, פרבולות מהצורה $y=kx^2$ עם "חור" בקודקוד, היכן ש- $(x,y)=(0,0)$.
קו הרמה $y=x^2$ מתאים לקונטור $c=1$, לכן אם נתקרב ל - $(0,0)$ משני הכיוונים שמאפשר מסלול זה, הגבול יהיה 1.
קו הרמה $y=-x^2$ מתאים לקונטור $c=-1$, לכן אם נתקרב ל - $(0,0)$ משני הכיוונים שמאפשר מסלול זה, הגבול יהיה 1- .
קווי הרמה $y=0$ ו- $x=0$ מתאימים לקונטור $c=0$, לכן אם נתקרב ל- $(0,0)$ מארבעת הכיוונים שמאפשרים מסלולים אלה, הגבול יהיה 0.

אנו רואים שמתקבלים גבולות שונים כאשר קרבים ל- $(0,0)$ בנתיבים שונים, ולכן אומרים שלפונקציה אין גבול כאשר $(x,y)\to(0,0)$.

באיור התחתון משמאל מוראה גרף הפונקציה $f_{(x,y)}=\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$.
הגרף מורכב מקונטורים פרבוליים שקודקודם החסר "נמצא" על ציר z .
לו היו הקודקודים החסרים "נמצאים" כולם באותה נקודה על ציר z , היה גרף הפונקציה "חותך" את ציר z בנקודה אחת שהייתה "ניתנת למילוי" והופכת את הפונקציה לרציפה.
אבל, הקודקודים החסרים "מפוזרים" **לאורכו** של ציר z כך שגרף הפונקציה "עוטף" אותו במקום "לחתוך" אותו.
גם אם נגדיר ערך לפונקציה על ציר z [ז"א ב- $(0,0)$], היא תישאר לא רציפה, משום שעדיין יתקבלו גבולות שונים כאשר נתקרב לציר z מכיוונים שונים. הפונקציה תהיה מוגדרת ב- $(0,0)$, אבל לא רציפה.