כלל השרשרת

כלל השרשרת לפונקציות של משתנה יחיד אומר, שאם $w = f_{(x)}$ הוא פונקציה גזירה של x ו- $x = g_{(t)}$ הוא פונקציה גזירה של t , אז w הופך לפונקציה גזירה של t ו- $\frac{dw}{dt}$ יכול להיות מחושב באמצעות הנוסחה $\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$.

בפונקציות של יותר ממשתנה אחד, מופיע כלל השרשרת במספר צורות בהתאם למספר המשתנים, אך כאשר לוקחים בחשבון את נוכחותם של המשתנים הנוספים ניתן לראות כי עיקרון הפעולה נותר בעינו.

פונקציות של שני משתנים

הנוסחה לכלל השרשרת עבור פונקציה $w = f_{(x,y)}$, כאשר $x = x_{(t)}$ ו- $y = y_{(t)}$ הן פונקציות גזירות של t , מובאת בתיאורמה שלהלן:

תיאורמה 5 : כלל השרשרת לפונקציות של שני משתנים בלתי תלויים
אם ל- $w = f_{(x,y)}$ ישנן נגזרות חלקיות רציפות f_x ו- f_y , ואם $x = x_{(t)}$ ו- $y = y_{(t)}$ הן פונקציות גזירות של t , אז הפונקציה המורכבת $w = f_{\left[x_{(t)}\ ,\ y_{(t)}\right]}$ הינה פונקציה גזירה של t ומתקיים :
$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$ או $\frac{df}{dt} = f_{x\,[x_{(t)}\ ,\ y_{(t)}]} \cdot x'_{(t)} + f_{y\,[x_{(t)}\ ,\ y_{(t)}]} \cdot y'_{(t)}$

ההוכחה צריכה להראות שאם x ו- y גזירות ב- $t = t_0$, אז w גזירה ב- t_0 ומתקיים

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0} \qquad \overrightarrow{\text{כאשר}} \qquad P_0 = \left(x_{(t_0)}\ , y_{(t_0)}\right)$$

בכתב תחתי מצוין היכן מחושבת כל נגזרת. נניח כי Δx , Δy ו- Δw הן התוספות הנובעות משינויו של t מ- t_0 ל- $t_0 + \Delta t$.
מאחר ש- f גזירה (ראה הגדרה בפרק הקודם), מתקיים

$$\Delta w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0} \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0} \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_1 \to 0$ כאשר $\Delta x, \Delta y \to 0$

כדי למצוא את $\frac{dw}{dt}$, נחלק את המשוואה הנ"ל ב- Δt ואז נניח ל- Δt לשאוף לאפס. החלוקה מניבה

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

כש- Δt שואף לאפס מתקבל

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0} + 0 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + 0 \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0}$$

הדיאגראמה שמשמאל מסייעת להמחשת כלל השרשרת.

הנגזרות $\frac{dx}{dt}$ ו- $\frac{dy}{dt}$ מחושבות כאשר $t = t_0$.

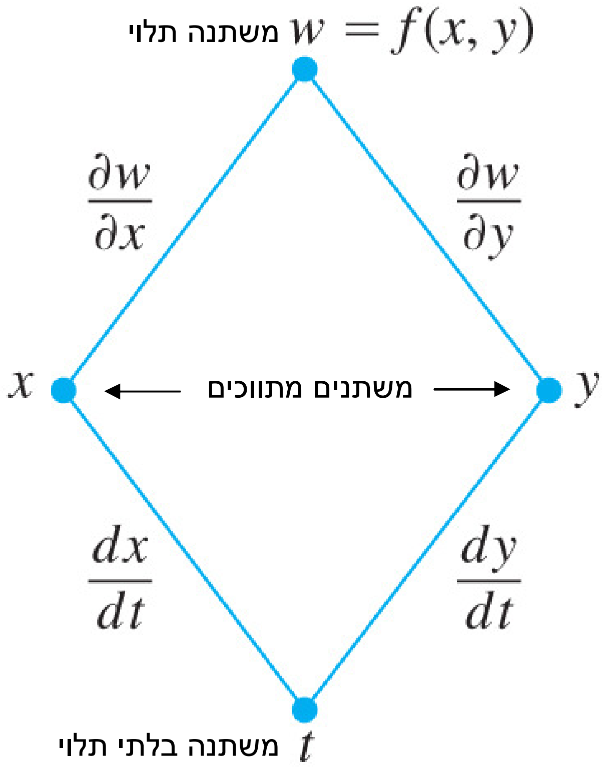
ערכיהן של הפונקציות הגזירות $x_{(t)}$ ו- $y_{(t)}$ מחושבים אף הם ב- $t = t_0$ ונקבעים לכן להיות x_0 ו- y_0 בהתאמה.

הנגזרות החלקיות $\frac{dw}{dx}$ ו- $\frac{dw}{dy}$ [שהן בעצמן פונקציות של $x_{(t)}$ ו- $y_{(t)}$] מחושבות בנקודה $P_{0(x_0, y_0)}$.

המשתנה הבלתי תלוי באמת הינו t , בעוד $x_{(t)}$ ו- $y_{(t)}$ הם "משתנים מתווכים" בדרך ל- w , שהינו המשתנה התלוי.

סימון מדויק יותר לכלל השרשרת מראה כיצד הנגזרות השונות בתיאורמה 5 מחושבות:

$$\frac{dw}{dt}_{(t_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}_{(x_0, y_0)} \cdot \frac{dx}{dt}_{(t_0)} + \frac{\partial f}{\partial y}_{(x_0, y_0)} \cdot \frac{dy}{dt}_{(t_0)}$$



$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

דוגמה מהספר (עמ' 998) – שימוש בכלל השרשרת.

השתמש בכלל השרשרת למציאת הנגזרת של $w = xy$ לפי t לאורך המסלול $y = \sin t$, $x = \cos t$.
מהו ערך הנגזרת ב- $t = \frac{\pi}{2}$?

פיתרון: נחיל את כלל השרשרת כדי למצוא את $\frac{dw}{dt}$:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial (xy)}{\partial x} \cdot \frac{d}{dt}(\cos t) + \frac{\partial (xy)}{\partial y} \cdot \frac{d}{dt}(\sin t) = y(-\sin t) + x(\cos t) =$$

$$\sin t\,(-\sin t) + \cos t\,(\cos t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$$

בדוגמה זו יכולנו להגיע לתוצאה גם באופן ישיר :

$$w = xy = \cos t \cdot \sin t = \frac{1}{2}\sin(2t) \quad => \quad \frac{dw}{dt} = \cos(2t)$$

בכל מקרה, ערך הנגזרת ב- $t = \frac{\pi}{2}$ הינו

$$\frac{dw}{dt}_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos \pi = -1$$

גזירה של פונקציה סתומה

כלל השרשרת לשני משתנים מוביל לנוסחה אשר מקלה מאוד את תהליך הגזירה של פונקציה סתומה. נניח כי

1. הפונקציה $F_{(x,y)}$ הינה גזירה וכמו כן
2. המשוואה $F_{(x,y)}=0$ מגדירה את y באופן סתום כפונקציה גזירה של x , נאמר $y=h_{(x)}$.

מאחר ש- $w=F_{(x,y)}=0$, הנגזרת $\frac{dw}{dx}$ חייבת להיות אפס. חישוב הנגזרת ע"י כלל השרשרת מראה כי

$$0 = \frac{dw}{dx} = F_x\cdot\frac{dx}{dx}+F_y\cdot\frac{dy}{dx} = F_x\cdot 1+F_y\cdot\frac{dy}{dx}$$

אם $F_y=\frac{\partial w}{\partial y}\neq 0$ אנו יכולים לפתור משוואה זו ולקבל

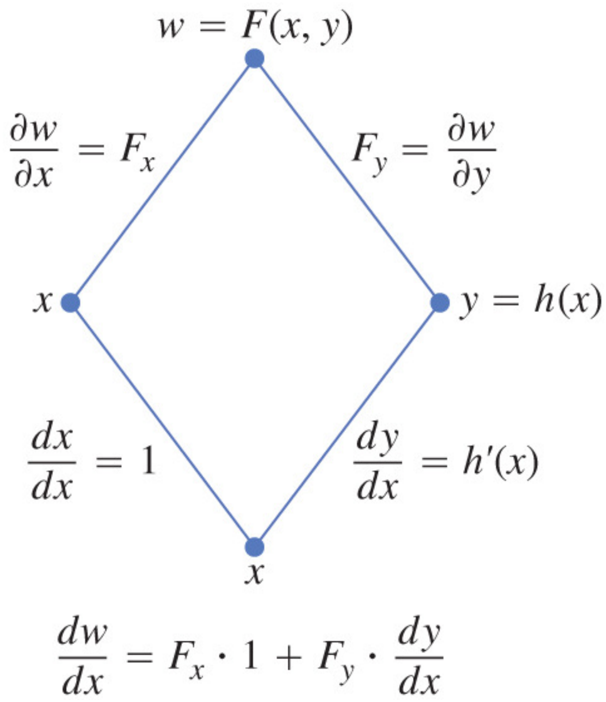
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

קשר זה מספק "קיצור דרך" למציאת נגזרות של פונקציות סתומות, והוא מובא בתיאורמה הבאה:

<u>נוסחה לגזירה סתומה</u>

נניח כי $F_{(x,y)}$ גזירה ושהמשוואה $F_{(x,y)}=0$ מגדירה את y כפונקציה גזירה של x . או אז, בכל נקודה שבה $F_y\neq 0$,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$



דוגמה מהספר (עמ' 1002) – גזירה סתומה.

מצא את $\frac{dy}{dx}$ אם $y^2-x^2-\sin xy=0$

פיתרון:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-2x-y\cos xy}{2y-x\cos xy} = \frac{2x+y\cos xy}{2y-x\cos xy}$$

לשם השוואה נפתור כעת בדרך ה"רגילה" :

$$y^2=x^2+\sin xy$$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(\sin xy) \quad => \quad 2y\cdot\frac{dy}{dx} = 2x+\cos xy\cdot\frac{d}{dx}(xy)$$

$$2y\cdot\frac{dy}{dx} = 2x+\cos xy\cdot\left(y+x\cdot\frac{dy}{dx}\right) \quad => \quad (2y-x\cos xy)\cdot\frac{dy}{dx} = 2x+y\cos xy \quad =>$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y\cos xy}{2y-x\cos xy}$$

אין מה להשוות בכלל אה?...מעכשיו רק בשיטה החדשה!