השתמש בפיתוח לטור חזקות כדי למצוא את $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax^2)}{1-\cos(bx)}$ .

פיתרון: ראשית נגיע לתשובה באמצעות לופיטל, למרות שלא כך התבקשנו לעשות זאת :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax^2)}{1-\cos(bx)} = \left[\frac{0}{0}\right] \to Lopital = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2ax}{1+ax^2}}{b\sin(bx)} = \lim_{x\to 0}\frac{2ax}{b(1+ax^2)\sin(bx)} = \left[\frac{0}{0}\right] \to$$

$$\to Lopital = \frac{2a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2ax\cdot\sin(bx)+(1+ax^2)\cdot b\cdot\cos(bx)} = \frac{2a}{b}\cdot\frac{1}{b} = \frac{2a}{b^2}$$

כעת באמצעות פיתוח לטור חזקות:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k = f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+\cdots$$

$$f_{(x)} = \ln(1+ax^2) \approx \sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k = f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2$$

$$f_{(0)} = \ln(1) = 0 \quad , \quad f'(x) = 2a\frac{x}{1+ax^2} \quad => \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 2a\frac{1+ax^2-2ax^2}{(1+ax^2)^2} = 2a\frac{1-ax^2}{(1+ax^2)^2} \quad => \quad f''(0) = 2a$$

$$\ln(1+ax^2) \approx \sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k = 0+0\cdot x+\frac{2a}{2!}\cdot x^2 = ax^2$$

גילינו שבקרבת $x=0$ , הפונקציה $f_{(x)} = ax^2$ מתנהגת בקירוב כמו הפונקציה $f_{(x)} = \ln(1+ax^2)$ .

$$f_{(x)} = \cos(bx) \approx \sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k = f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2$$

$$f_{(0)} = \cos(0) = 1 \quad , \quad f'(x) = -b\sin(bx) \quad => \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -b^2\cos(bx) \quad => \quad f''(0) = -b^2$$

$$\cos(bx) \approx \sum_{k=0}^{2}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k = 1+0\cdot x+\frac{-b^2}{2!}\cdot x^2 = 1-\frac{b^2}{2}\cdot x^2$$

גילינו שבקרבת $x=0$ , הפונקציה $f_{(x)} = 1-\frac{b^2}{2}x^2$ מתנהגת בקירוב כמו הפונקציה $f_{(x)} = \cos(bx)$ .

<u>לסיכום</u> :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax^2)}{1-\cos(bx)} = \lim_{x\to 0}\frac{ax^2}{1-\left(1-\frac{b^2}{2}x^2\right)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{ax^2}{\frac{b^2}{2}x^2}\right) = \frac{2a}{b^2}$$