

האם הטור  $\frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots$  מתכנס או מתבדר?

יש לבחור תשובה אחת:

a. לא ניתן לדעת

b. מתכנס

c. מתבדר

$$\frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18} + \dots + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \dots \cdot (4n-2)} + \dots$$

האם  $a_n \rightarrow 0$ ? כן, כי הכופל האחרון במכנה גדל בקפיצות של 4 בעוד זה שבמונה גדל בקפיצות של 3.  
 האם  $a_n \rightarrow 0$  מספיק מהר? כן, כי "עמוק" בטור איבר שווה לקודמו כפול  $\frac{3}{4}$  (בקירוב), ז"א הטור מקבל אופי הנדסי.  
 נוכיח זאת באמצעות מבחן המנה - כל אברי הטור חיוביים כך שיש לנו "אור ירוק" להשתמש בו:

מבחן המנה

יהא  $\sum a_n$  טור שאיבריו חיוביים ונניח ש-  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q^*$ . או אז מתקיים:

(א) הטור  $\sum a_n$  מתכנס אם  $q^* < 1$

(ב) הטור  $\sum a_n$  מתבדר אם  $1 < q^*$

(ג) התוצאה אינה חד משמעית אם  $q^* = 1$

$$a_n = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \dots \cdot (4n-2)}$$

$$a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (3n+1) \cdot (3n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \dots \cdot (4n-2) \cdot (4n+2)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (3n+1) \cdot (3n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \dots \cdot (4n-2) \cdot (4n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \dots \cdot (4n-2)}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (3n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+4)}{(4n+2)} = \frac{3}{4}$$

קיבלנו  $q^* = \frac{3}{4} < 1$  אז הטור הנתון מתכנס.