

$$\sum \frac{(-1)^n}{1+2^n} \text{ נתון הטור המתחלף}$$

על פי מבחן השארית לטורים מתחלפים, כמה איברים ראשונים של הטור יש לחבר זה לזה, **לכל הפחות**, כך שתרומת השארית לסכום, **בערכה המוחלט**, תהיה קטנה מ- 10^{-3} ?

פיתרון :

$$\sum \frac{(-1)^n}{1+2^n} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{17} - \frac{1}{33} + \frac{1}{65} - \frac{1}{129} + \frac{1}{257} - \frac{1}{513} + \frac{1}{1025} - \frac{1}{2049} + \dots + \frac{(-1)^n}{1+2^n} + \dots$$

מבחן הטור המתחלף (תיאורמת לייבניץ)

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot u_n + \dots$ מתכנס, אם מתקיימים 3 התנאים שלהלן :

(א) האיברים u_n חיוביים כולם.

(ב) $u_{n+1} \leq u_n$ לכל $n \leq N$

(ג) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

הטור הנתון הינו טור מתחלף אשר מקיים את שלושת התנאים שלעיל, ואם כך הוא מתכנס, ז"א סכומו סופי ויש טעם לשאלה.

אומדן סכומו הכולל של טור מתחלף בהינתן הסכום החלקי ה- "n" שלו .

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n$ מקיים את שלושת התנאים של תיאורמת לייבניץ, אז מתקיים :

ההפרש (בערך מוחלט) שבין הסכום החלקי ה- "n" : $S_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot u_n$

לבין סכום הטור L, קטן מ- u_{n+1} , ז"א קטן מהאיבר הבא שעדיין לא הוכנס לסכום.

יתרה מכך, סימנו של ההפרש $L - S_n$ (השארית) זהה לסימן של המקדם של u_{n+1} .

במילים אחרות: השארית (בערך מוחלט) קטנה מ"האיבר הבא" שעדיין לא הוכנס לסכום.

במילים עוד יותר אחרות: השארית (בערך מוחלט) קטנה מאיברה הראשון.

ביקשנו שארית קטנה מ- 10^{-3} , לכן נשאל: "באיזה מקום n עומד האיבר הראשון שהינו קטן/שווה ל- 10^{-3} ?"

איבר זה יהיה איברה הראשון של השארית.

$$|a_n| = \frac{1}{1+2^n} \leq 10^{-3} \Rightarrow 1,000 \leq 1+2^n \Rightarrow 999 \leq 2^n \Rightarrow 10 \leq n$$

אם כך, האיבר אשר עומד במקום העשירי הוא הראשון להיות קטן מ- $10^{-3} = \frac{1}{1000}$.

$$\sum \frac{(-1)^n}{1+2^n} = \overbrace{-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{17} - \frac{1}{33} + \frac{1}{65} - \frac{1}{129} + \frac{1}{257} - \frac{1}{513}}^{9 \text{ איברים ראשונים}} + \overbrace{\frac{1}{1025} - \frac{1}{2049} + \dots + \frac{(-1)^n}{1+2^n}}^{\text{השארית}}$$

לסיכום, יש לחבר זה לזה 9 איברים ראשונים **לפחות** כדי שהשארית תהיה קטנה מ- $\frac{1}{1,000}$ **בערכה המוחלט**.

אם נחבר רק 8 איברים ראשונים, תהיה השארית **שלילית** וקטנה **בערכה המוחלט** מ- $\frac{1}{513}$, אך לא מ- $\frac{1}{1,000}$ כפי שנידרש.