נתון הטור המתחלף $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!}$ (שאלה מקוונת בשינוי נוסח – על מנת להבהיר את מה שלדעתי התכוון המשורר לשאול).

על פי מבחן השארית לטורים מתחלפים, כמה איברים ראשונים של הטור יש לחבר זה לזה, **לכל הפחות**, כך שתרומת השארית לסכום, **בערכה המוחלט**, תהיה קטנה מ- $5 \cdot 10^{-5}$?

פיתרון :

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{40,320} - \frac{1}{362,880} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} + \cdots$$

מבחן הטור המתחלף (תיאורמת לייבניץ)

הטור $\sum_1^\infty (-1)^{n+1} \cdot u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot u_n + \cdots$ מתכנס, אם מתקיימים 3 התנאים שלהלן :

א) האיברים u_n חיוביים כולם.

ב) $u_{n+1} \le u_n$ לכל $N \le n$

ג) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

הטור הנתון הינו טור מתחלף אשר מקיים את שלושת התנאים שלעיל, ואם כך הוא מתכנס, ז"א סכומו סופי ויש טעם לשאלה.

<u>אומדן סכומו הכולל של טור מתחלף בהינתן הסכום החלקי ה- "n"י שלו .</u>

אם הטור $\sum_1^\infty (-1)^{n+1} \cdot u_n$ מקיים את שלושת התנאים של תיאורמת לייבניץ, אז מתקיים :

ההפרש (בערך מוחלט) שבין הסכום החלקי ה- "n"י : $S_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot u_n$

לבין סכום הטור L , קטן מ- u_{n+1} , ז"א קטן מהאיבר הבא שעדיין לא הוכנס לסכום.

יתרה מכך, סימנו של ההפרש $L - S_n$ (השארית) זהה לסימן של המקדם של u_{n+1} .

במילים אחרות: השארית (בערך מוחלט) קטנה מאיברה הראשון.

על השארית להיות קטנה מ- $5 \cdot 10^{-5}$, לכן נשאל: "באיזה מקום n עומד האיבר הראשון שהינו קטן\שווה ל- $5 \cdot 10^{-5}$?" .

איבר זה יהיה איברה הראשון של השארית.

$$|a_n| = \frac{1}{n!} \le 5 \cdot 10^{-5} \quad => \quad n! \ge 20,000$$

כעת, $7! = 5040 < 20,000$ ואילו $8! = 40320 > 20,000$.

אם כך, האיבר אשר עומד במקום התשיעי (סופרים כאן מ- 0 לא לשכוח) הוא הראשון להיות קטן מ- $5 \cdot 10^{-5} = \frac{1}{20,000}$.

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!} = \underbrace{1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040}}_{\text{8 איברים ראשונים}} + \underbrace{\frac{1}{40,320} - \frac{1}{362,880} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \cdots}_{\text{השארית}}$$

לסיכום, יש לחבר זה לזה **8** איברים ראשונים <u>**לפחות**</u> כדי שהשארית תהיה קטנה מ- $\frac{1}{20,000}$ **בערכה המוחלט**.

אם נחבר רק 7 איברים ראשונים, תהיה השארית **שלילית** וקטנה **בערכה המוחלט** מ- $\frac{1}{5040}$, אך לא מ- $\frac{1}{20,000}$ כפי שנידרש.