<u>טורי טיילור ומקלורן</u>

ניזכר בקטע הבא מתוך תיאורמה 19 (גזירה של טורי חזקות):

תיאורמה 19: תיאורמת הגזירה של טורי חזקות אם טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$ מתכנס באינטרוול $a-R < x < a+R$, אז הוא מגדיר פונקציה: $f_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$ באינטרוול זה . בתוך האינטרוול (אינטרוול ההתכנסות) ישנן לפונקציה $f_{(x)}$ נגזרות מכל הסדרים.

מעניין אם גם ההיפך נכון:
האם פונקציה $f_{(x)}$ אשר לה נגזרות מכל הסדרים באינטרוול $\mathbf{I}$ שמרכזו $x=a$, מגדירה טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$ באינטרוול זה ? התשובה היא בקיצור - כן. יופי, אבל אם כך נשאלות שתי שאלות נוספות:

1. מה יהיו מקדמי הטור (c_n) ? תשובה: ראה מסגרת מתחת.
2. האם הטור יתכנס ל- $f_{(x)}$ בכל נקודה שבתוך האינטרוול $\mathbf{I}$? תשובה: בפונקציות מסוימות כן, ובאחרות לא.

הגדרות טור טיילור , טור מקלורן

תהי f פונקציה עם נגזרות מכל הסדרים באינטרוול כלשהו המכיל את a כנקודה פנימית .
או אז, טור טיילור של f בנקודה $x=a$ הינו :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + \cdots$$

טור מקלורן של f הינו למעשה טור טיילור של f בנקודה $x=0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \cdots$$

דוגמה מהספר (עמ' 807) : מצא את טור טיילור של $f_{(x)}=\frac{1}{x}$ ב- $x=2$. היכן, אם בכלל, מתכנס הטור ל- $\frac{1}{x}$?

פיתרון:

$$f_{(x)}=x^{-1} \quad => \quad f_{(2)}=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

$$f'_{(x)}=-x^{-2} \quad => \quad f'_{(2)}=-2^{-2}=-\frac{1}{2^2}$$

$$f''_{(x)}=2!\,x^{-3} \quad => \quad \frac{f''_{(2)}}{2!}=2^{-3}=\frac{1}{2^3}$$

$$f'''_{(x)}=-3!\,x^{-4} \quad => \quad \frac{f'''_{(2)}}{3!}=-2^{-4}=-\frac{1}{2^4}$$

.

.

.

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot n!\cdot x^{-(n+1)} \quad => \quad \frac{f^{(n)}(2)}{n!}=(-1)^n\cdot 2^{-(n+1)}=\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$$

הנוסחה לטור טיילור היא :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(x-a)^k = f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n+\cdots$$

ולפיכך טור טיילור של $f_{(x)}=\frac{1}{x}$ ב- $x=2$ הוא :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot(x-2)^k = \frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}(x-2)+\frac{1}{2^3}(x-2)^2-\frac{1}{2^4}(x-2)^3+\ldots+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\cdot(x-2)^n+\cdots$$

זהו טור הנדסי שבו $a_1=\frac{1}{2}$ ו- $q=-\frac{1}{2}(x-2)$. הוא מתכנס באופן מוחלט עבור $|x-2|<2 \;<=>\; |q|<1$.

סכום הטור הינו (כצפוי) $S_{n\to\infty}=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1/2}{1+\frac{1}{2}(x-2)}=\frac{1}{2+x-2}=\frac{1}{x}=f_{(x)}$

אם כך, טור החזקות שמגדירה הפונקציה $f_{(x)}=\frac{1}{x}$ ב- $x=2$, מתכנס ל- $f_{(x)}$ עבור $|x-2|<2$, ז"א עבור $0<x<4$.

בהקשר פרטי זה ניזכר לרגע בשאלה 2 מראש הפרק ובתשובה שניתנה לה אז :

לפונקציה $f_{(x)}=\frac{1}{x}$ ישנן נגזרות מכל הסדרים באינטרוול $0<x<4$ שמרכזו $x=2$, לכן היא מגדירה טור חזקות באינטרוול זה. האם הטור מתכנס ל- $f_{(x)}$ בכל נקודה שבתוך האינטרוול ? אכן כן, במקרה זה.

<u>פולינומי טיילור</u>

לינאריזציה של פונקציה גזירה f בנקודה a , היא הפולינום ממעלה ראשונה $P_1(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$.

אם ישנן ל- f נגזרות מסדר גבוה יותר בנקודה a , אז יש לה בהתאמה גם קירובים פולינומיאליים מסדרים גבוהים יותר.

פולינומים אלה מכונים **פולינומי טיילור** של f .

הגדרה פולינום טיילור מסדר n

תהי f פונקציה עם נגזרות מסדר k , $k=1,2,\ldots,N$, באינטרוול כלשהו המכיל את a כנקודה פנימית .

או אז לכל שלם n , $0\le n\le N$, הפולינום טיילור מסדר n של f בנקודה $x=a$ הינו :

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot(x-a)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n$$

ממש כשם שלינאריזציה של f בנקודה a מהווה את הקירוב **הליניארי** המיטבי שיש ל- f בקרבת הנקודה a , כך פולינומי טיילור מסדרים גבוהים יותר מהווים את הקירובים הפולינומיאליים המיטביים שיש ל- f **מהמעלות** המתאימות להם.

דוגמה מהספר (עמ' 808) : מצא את טור מקלורן של $f_{(x)} = e^x$ ואת פולינום טיילור שלה (ב- $x = 0$ כמובן).

פיתרון:

מאחר שהנגזרת מסדר n של פונקציה זו היא $f^{(n)}(x) = e^x$, מתקבל $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ ללא תלות בסדר הנגזרת .
הנוסחה לטור מקלורן היא :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \cdots$$

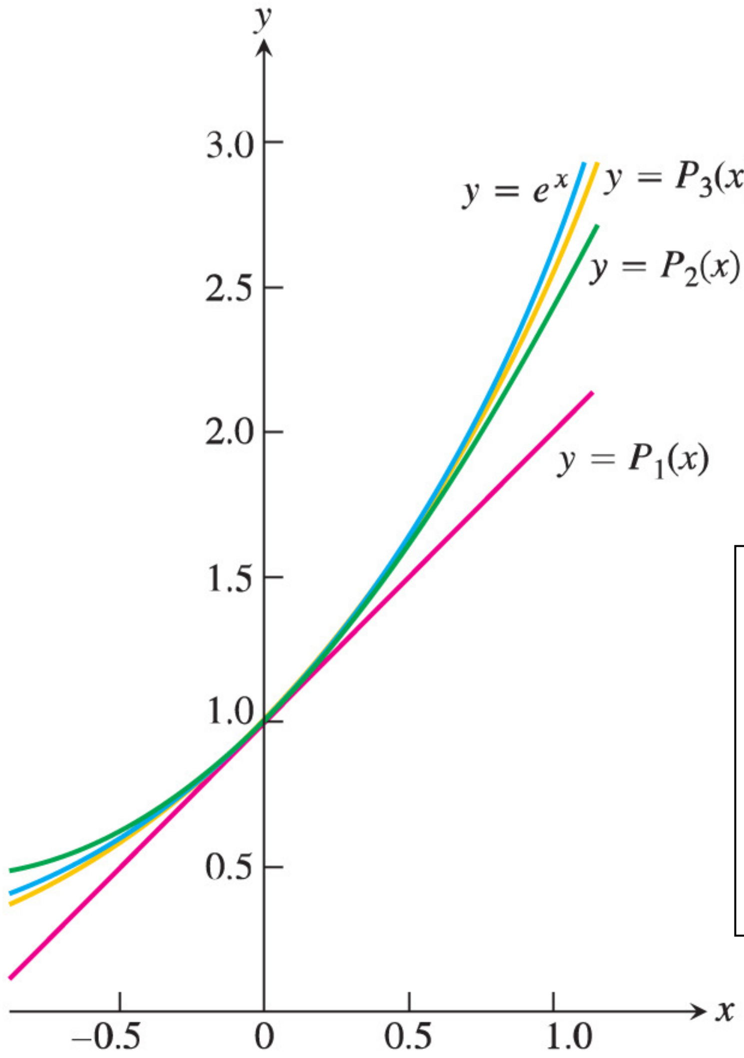
ולפיכך טור מקלורן של $f_{(x)} = e^x$ הוא :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \cdots$$

גם כאן ניזכר לרגע בשאלה 2 מראש הפרק:

לפונקציה $f_{(x)} = e^x$ ישנן נגזרות מכל הסדרים באינטרוול $-\infty < x < \infty$ שמרכזו $x = 0$, לכן היא מגדירה טור חזקות באינטרוול זה. האם הטור מתכנס ל- $f_{(x)}$ בכל נקודה שבתוך האינטרוול ? אכן כן, גם במקרה זה.

פולינום טיילור מסדר n של הפונקציה $f_{(x)} = e^x$ ב- $x = 0$ הינו: $P_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot x^n$



הגרף של $f_{(x)} = e^x$ (כחול) ופולינומי טיילור שלו :

ורוד (קירוב ליניארי) $P_1(x) = 1 + x$

ירוק $P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2$

כתום $P_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3$

שימו לב לקירוב הטוב שמושג בקרבת המרכז $x = 0$.

דוגמה מהספר (עמ' 809) : מצא את טור מקלורן של $f_{(x)} = \cos x$ ואת פולינום טיילור שלה (ב- $x = 0$ כמובן).

פיתרון:

$$f(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\cos x \qquad f^{(4)}(x) = \cos x \qquad f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x \qquad f'''(x) = \sin x \qquad f^{(5)}(x) = -\sin x \qquad f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x$$

הנגזרת מסדר זוגי של פונקציה זו היא $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$, ומסדר אי-זוגי $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x$.

עבור $x = 0$ מתקבל $f^{(2n)}(0) = (-1)^n \cos 0 = (-1)^n$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^{n+1} \sin 0 = 0$

הנוסחה לטור מקלורן היא :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \cdots$$

ולפיכך טור מקלורן של $f_{(x)} = \cos x$ הוא :

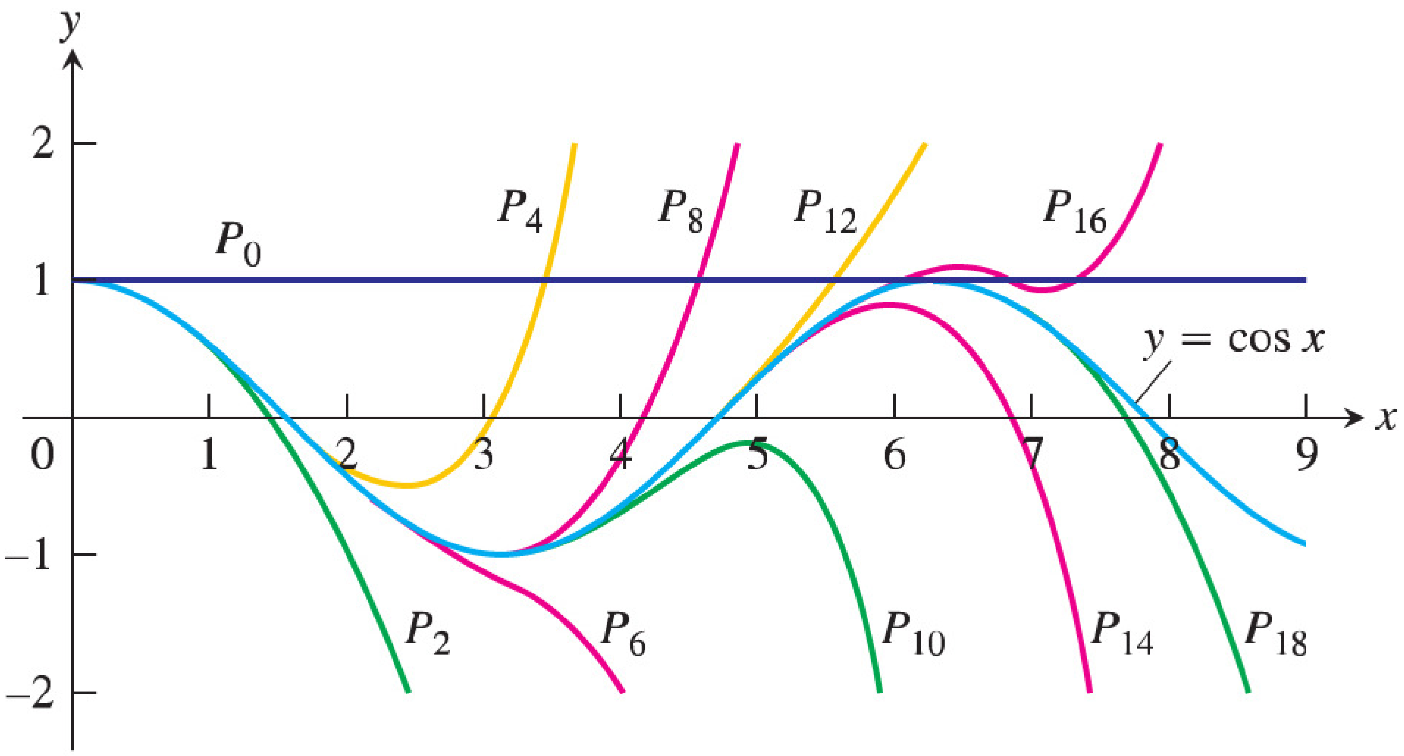
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} = 1 + 0 \cdot x - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + 0 \cdot x^5 - \frac{1}{6!} \cdot x^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} + \cdots$$

לגבי שאלה 2 מראש הפרק, גם כאן הטור מתכנס ל- $f_{(x)}$ בכל נקודה שבתוך האינטרוול $-\infty < x < \infty$ אשר מרכזו $x = 0$.

בשל היות $f^{(2n+1)}(0) = 0$, **פולינומי טיילור** מסדרים זוגיים $(2n)$ ואי-זוגיים $(2n+1)$ הינם זהים :

$$P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 - \frac{1}{6!} \cdot x^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$

באיור ניתן לראות באיזו מידה מהווים פולינומים אלה קירוב של $f_{(x)} = \cos x$ בקרבת $x = 0$.
בשל היותם סימטריים לציר y , מוצג רק חלקם הימני של הגרפים כדי לחסוך במקום.



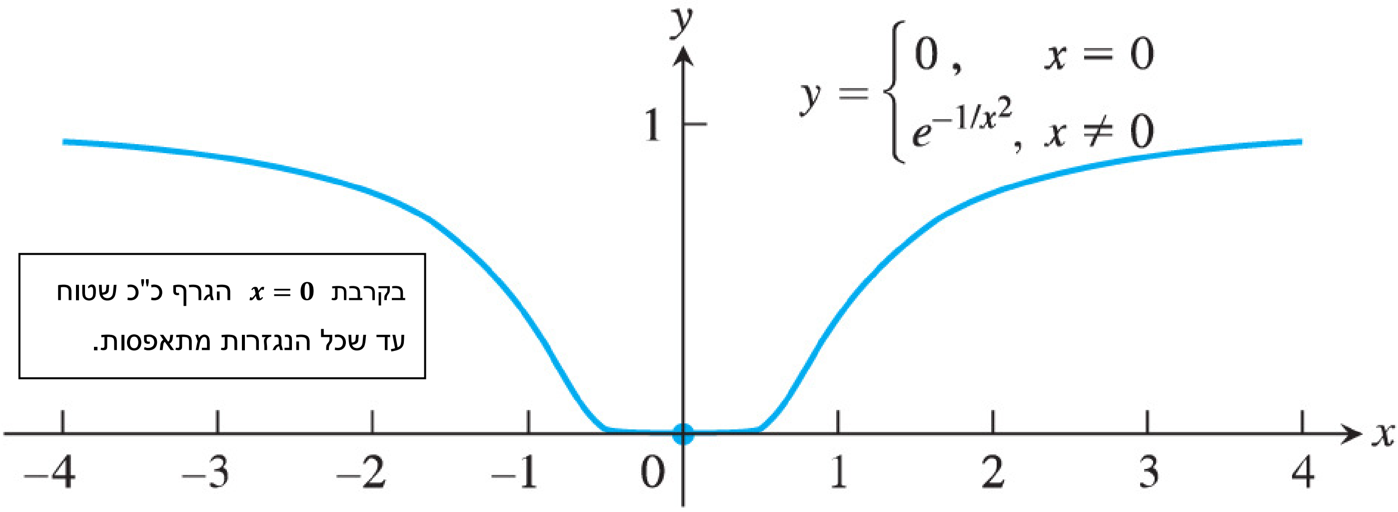
הפולינומים $P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}$ מתכנסים ל- $\cos x$ כאשר $n \to \infty$.

אנו יכולים להסיק כיצד מתנהג $\cos x$ במרחק רב מהראשית על סמך ידיעת ערכו וערך נגזרותיו ב- $x = 0$!!!

דוגמה לפונקציה אשר טור מקלורן שהיא מגדירה אינו מתכנס לערך הפונקציה (למעט כאשר $x=0$) :

$$f_{(x)}=\begin{cases}0 & , \quad x=0\\ e^{-1/x^2} & , \quad x\neq 0\end{cases}$$

ניתן להראות שבכל x ישנן לפונקציה זו נגזרות מכל הסדרים, ושב- $x=0$ **כולן שוות ל- 0** .



הנוסחה לטור מקלורן היא:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k \;=\; f(0)+\;f'(0)\cdot x\;+\;\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2\;+\;\frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3\;+\;\dots\;+\;\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n\;+\cdots$$

ולאור העובדה שב- $x=0$ מתאפסות כל הנגזרות נקבל :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k \;=\; 0+\;0\cdot x\;+\;0\cdot x^2\;+\;0\cdot x^3\;+\;\dots\;+\;0\cdot x^n\;+\cdots$$

שוב, כפי שעשינו בדוגמאות הקודמות, נבחן את המקרה הפרטי דנן בהקשר של שאלה 2 מראש הפרק :

לפונקציה $f_{(x)}=\begin{cases}0 & , \quad x=0\\ e^{-1/x^2} & , \quad x\neq 0\end{cases}$ ישנן נגזרות מכל הסדרים באינטרוול $-\infty<x<\infty$ שמרכזו $x=0$, לכן היא מגדירה טור חזקות באינטרוול זה. האם הטור מתכנס ל- $f_{(x)}$ בכל נקודה שבתוך האינטרוול ?

ממש לא! הטור מתכנס אומנם (ל- 0) עבור כל x , אבל מתכנס **לערך הפונקציה** רק כאשר $x=0$.

לסיכום פרק זה ננסח מחדש את שאלה 2 שבראש הפרק :

עבור אילו ערכים של x מצופה מטור טיילור להתכנס לערכי הפונקציה אשר מגדירה אותו ?

נשאל גם שאלה נוספת, בקשר לקירובים פולינומיאליים של פונקציות :

באינטרוול נתון כלשהו, באיזו מידה מהווים פולינומי טיילור קירוב של הפונקציה ?

התשובות לשאלות אלה ניתנות באמצעות תיאורמה של טיילור אשר תוצג בפרק הבא.